

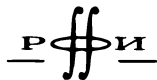
А.В. Тимофеев

*Резонансные
явления
в колебаниях
плазмы*



МОСКВА • ФИЗМАТЛИТ
2000

УДК 533.951
ББК 22.333
Т 41



Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 00-02-30019

ТИМОФЕЕВ А.В. **Резонансные явления в колебаниях плазмы** —
М.: Физматлит, 2000. — 224 с. — ISBN 5-9221-0059-9.

В монографии исследуется резонансное взаимодействие коллективных степеней свободы (самосогласованные колебания) с индивидуальными (движение отдельных частиц). В немагнитной плазме — это черенковское резонансное взаимодействие (резонанс Вавилова—Черенкова), в плазме в магнитном поле — циклотронное. В неоднородных плазменных течениях совпадение скорости течения с фазовой скоростью колебаний вызывает явление гидродинамического резонанса. Если плазма неоднородна, то резонансное взаимодействие, обязанное постоянству фазы колебаний на траектории частицы (фазовый резонанс), может приводить к резкому локальному росту волнового вектора колебаний (пространственный резонанс). В то же время пространственные резонансы могут возникать и в отсутствие фазовых. Таким резонансом является альвеновский, также рассматриваемый в монографии.

Для научных работников-физиков, а также для студентов старших курсов физических вузов.

Ил. 47. Библиогр. 142 назв.

Научное издание

Тимофеев Александр Владимирович

Резонансные явления в колебаниях плазмы

Редактор *Д.А. Миртова*
Оригинал-макет *Ст.Ю. Мельникова*

ЛР №071930 от 06.07.1999
Подписано в печать 17.07.00. Формат 60×90/16
Бумага офсетная №1. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 14. Уч.-изд. л. 15. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательская фирма
«Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117864 Москва, Профсоюзная ул., 90

Отпечатано с оригинал-макета
в Московской типографии №6
Министерства Российской Федерации
по делам печати, телерадиовещания
и средств массовых коммуникаций
109088, Москва, Южнопортовая ул., 24

ISBN 5-9221-0059-9



ISBN 5-9221-0059-9

© А.В.Тимофеев, 2000

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
--------------------	---

Г Л А В А 1

РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ПЛАЗМЕ. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ

1. Резонансное взаимодействие в немагнитиченной плазме	11
1.1. Уравнение Власова и индивидуальные степени свободы в плазме. Псевдоволны	11
1.2. Бесстолкновительное резонансное взаимодействие и псевдоволны	15
1.3. Последовательный учет столкновений. Правило обхода Ландау	21
1.4. Затухающие колебания и столкновения	24
1.5. Резонансное взаимодействие и псевдоволны в неоднородной плазме	28
1.6. Резонансное взаимодействие при скачках скорости заряженных частиц	34

Г Л А В А 2

РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

2. Циклотронное резонансное взаимодействие в линейном приближении	38
2.1. Механизм циклотронного резонансного взаимодействия	38
2.2. Интеграл движения	42
2.3. Эволюция орбит заряженных частиц в магнитных ловушках при циклотронном резонансном взаимодействии	46
3. Циклотронное резонансное взаимодействие с волной конечной амплитуды	53
3.1. Второй фундаментальный гамильтониан	53
3.2. ЭЦР-взаимодействие слабoreлятивистских электронов	57

3.3. Резонансное циклотронное взаимодействие в неоднородных системах. Адиабатический инвариант и явление автофазировки	58
3.4. Бифуркации фазовой плоскости. Скачки адиабатического инварианта. Нагрев электронов	63
4. Резонансное взаимодействие в слабом магнитном поле	67
4.1. О связи черенковского резонансного взаимодействия с циклотронным	67
4.2. Синхротронное излучение как черенковское	72
4.3. Серфатронное ускорение	76
5. Возникновение стохастичности при резонансном взаимодействии в слабом магнитном поле	78
5.1. Стандартное отображение. Возникновение стохастичности в динамических системах	78
5.2. Диффузионное уравнение	81
5.3. Стохастизация резонансного взаимодействия в слабом магнитном поле	84

Г Л А В А 3

КОЛЕБАНИЯ ПЛАЗМЫ В УСЛОВИЯХ РЕЗОНАНСНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

6. Колебания плазмы в однородном магнитном поле	89
6.1. Колебания плазмы в терминах циркулярно поляризованных электромагнитных полей	89
6.2. Циклотронные колебания в однородном магнитном поле	94
7. Циклотронные колебания, распространяющиеся вдоль неоднородного магнитного поля	102
7.1. Формулы Баддена	102
7.2. О точности адиабатического волнового уравнения	108
7.3. Соответствие гидродинамики и кинетики в задаче о прохождении электромагнитных колебаний через точку циклотронного резонанса	111
7.4. Резонансное взаимодействие в немонотонно меняющемся магнитном поле	116
7.5. Электронные циклотронные колебания вблизи оси адиабатических ловушек	120
8. Ионные циклотронные колебания в неоднородной плазме	124
8.1. Альфвеновский резонанс в неоднородной плазме. Трансформация мод	124

8.2. Влияние альвеновского резонанса на магнитозвуковые колебания	132
8.3. Колебания плазмы при наличии «малой добавки»	134
8.4. «Магнитный берег» в открытых магнитных ловушках	137
9. Низкочастотные альвеновские колебания неоднородной плазмы	139
9.1. Вопрос о собственных альвеновских колебаниях неоднородной плазмы. Аналог теоремы Рэлея	139
9.2. Ограниченность теоремы Рэлея	142
9.3. Эволюция начальных возмущений	146
9.3.1. Общие соотношения	146
9.3.2. Малые времена ($t \ll t_s$)	149
9.3.3. Большие времена ($t \gg t_s$)	150

Г Л А В А 4

РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ПЛАЗМЫ И ЖИДКОСТИ

10. Резонансное взаимодействие в плоскопараллельных течениях обычной жидкости	153
10.1. Теорема Рэлея	153
10.2. Энергия колебаний	158
10.3. Интерпретация теоремы Рэлея	160
10.4. Неустойчивость пуазейлевского течения	164
10.5. Эволюция начальных возмущений	165
11. Желобковые колебания неоднородно движущейся плазмы	166
11.1. Желобковые колебания газа заряженных частиц одного сорта	166
11.2. Желобковые колебания разреженной нескомпенсированной плазмы	173
11.3. Желобковые колебания плотной плазмы с холодными ионами в электрическом поле	176
11.4. Желобковые колебания плотной плазмы с горячими ионами	179
11.5. О явлении ларморовского резонанса	186
11.5.1. Плазма с неоднородными распределениями плотности и температуры	186
11.5.2. Плазма с неоднородным распределением плотности и однородным распределением температуры	193
11.6. О влиянии гидродинамического резонансного взаимодействия на другие виды плазменных колебаний	197

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Асимптотика решения неоднородного уравнения Эйри	201
2. Стандартное отображение в присутствии случайных воздействий	203
3. ЭЦР-взаимодействие монохроматического пучка электронов в неоднородном магнитном поле	208
4. Уравнения с малым параметром перед старшей производной	210
4.1. Уравнение колебаний плоскопараллельных течений обычной жидкости	210
4.2. Уравнения высокочастотных альвеновских и желобковых ко- лебаний	214
4.3. Уравнение низкочастотных альвеновских колебаний	215
5. Влияние электрон-ионного трения на желобковые колебания	217
 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	 220

Введение

Понятие о резонансном взаимодействии колебаний сплошной среды с движением ее частиц возникло в теории плазмы. Это связано с характерной особенностью плазмы — дальностью действия кулоновских сил, посредством которых частицы плазмы объединяются в сплошную среду. По этой причине движение каждой заряженной частицы в плазме подвержено влиянию множества других частиц, отстоящих на расстояния, значительно превышающие межчастичные. Согласно А.А.Власову, в результате этого влияния становятся возможными коллективные — согласованные — движения частиц без событий, которые принято называть кулоновскими столкновениями, т.е. без парных взаимодействий, приводящих к существенному изменению энергии и импульса частиц [1]. Однако если температура плазмы не слишком низка, то в силу сравнительной слабости кулоновских сил обобществляется малая доля степеней свободы, в то время как на остальные степени свободы влияние коллектива остается довольно слабым, и их можно считать индивидуальными. Таким образом, в плазме одновременно сосуществуют как индивидуальные, так и коллективные степени свободы [2]. Чтобы пояснить эту особенность плазмы, полезно сравнить ее с обычным газом. В разреженном — кнудсеновском — газе отдельные частицы не взаимодействуют между собой, и поэтому коллективные степени свободы отсутствуют. С повышением плотности частота столкновений растет, в результате появляются коллективные степени свободы — звуковые волны. При этом из-за интенсивных столкновений энергия и импульс отдельных частиц меняются столь часто, что индивидуальные степени свободы заканчивают независимое существование.

В плазме коллективные степени свободы принимают вид самосогласованных колебаний, в которых осциллируют параметры плазмы и электромагнитные поля. Заряженные частицы,

представляющие индивидуальные степени свободы, могут обмениваться с самосогласованными колебаниями энергией и импульсом. Обмен становится особенно интенсивным, если фаза колебаний на траектории частицы не меняется со временем (фазовый резонанс). В немагнитной плазме для этого должно выполняться черенковское резонансное условие $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ (резонанс Вавилова—Черенкова). Впервые влияние резонансного взаимодействия на колебания плазмы было рассмотрено в [3].

При наличии внешнего магнитного поля резонансное условие принимает вид

$$\omega = n\omega_j + k_{\parallel}v_{\parallel},$$

где n — целое число, ω_j — циклотронная частота частиц сорта j , значком \parallel отмечены проекции векторов на направление магнитного поля.

В том случае, когда циклотронная частота намного превышает доплеровский сдвиг частоты, вызываемый движением частицы вдоль магнитного поля ($k_{\parallel}v_{\parallel}$), говорят о циклотронном резонансе.

Постоянство фазы на траектории заряженной частицы не только способствует интенсивному обмену энергией и импульсом с колебаниями, но и ведет к росту диэлектрического отклика плазмы. Это обстоятельство существенно в системах с неоднородным магнитным полем, в которых условие циклотронного резонанса может быть выполнено лишь локально. В таких системах при приближении к точке (линии, поверхности) циклотронного резонанса волновой вектор колебаний может резко возрастать. В физике плазмы явление резкого локального возрастания волнового вектора также принято называть резонансом. Чтобы отличать данное явление от явления, вызываемого постоянством фазы колебаний на траектории заряженной частицы, будем говорить о фазовом и пространственном резонансах.

Следует отметить, что фазовый резонанс не всегда сопровождается пространственным. Так например, если электромагнитные колебания пересекают поверхность циклотронного резонанса ($\omega = \omega_j(\mathbf{r})$) под достаточно большим углом — наклонно к магнитному полю, то их волновой вектор в окрестности резонансной поверхности не испытывает существенных изменений. С другой стороны имеются ситуации (плазменный резонанс, альвеновский резонанс и т. д.), при которых пространственный резонанс возникает в отсутствие фазового. В этом случае он, как

правило, ведет к диссипации колебаний или к трансформации в колебания с существенно меньшей длиной волны.

Совпадение пространственного и фазового резонансов характерно для неоднородных плазменных течений. Если плазма покоится, то в резонанс с колебаниями в каждой точке пространства попадает малая доля частиц из распределения по скоростям. Для их выявления требуется кинетическое рассмотрение, и соответственно сами резонансы могут быть названы кинетическими. В неоднородных течениях распределение частиц по скоростям как-бы развернуто в обычном пространстве, поэтому при локальном совпадении скорости течения с фазовой скоростью колебаний все резонансные частицы концентрируются в окрестности резонансной точки. В [4], где введено понятие о таких резонансах, они были названы гидродинамическими. Гидродинамические резонансы, как и всякие фазовые резонансы, должны радикально воздействовать на устойчивость неоднородно движущейся плазмы. В зависимости от конкретных условий такое воздействие может быть как стабилизирующим, так и дестабилизирующим. По-видимому впервые стабилизирующее воздействие неоднородного движения на колебания плазмы наблюдалось еще в 60-х годах в экспериментах на открытых ловушках ОГРА-1 и «Алиса», где плазма искусственно приводилась в неоднородное вращение (см. [5,6]). В настоящее время распространена точка зрения, согласно которой переход плазмы токамаков в режим улучшенного удержания обуславливается подавлением турбулентности из-за дрейфа в неоднородном электрическом поле. Весьма вероятно, что в обеих системах улучшение устойчивости плазмы было связано с явлением гидродинамического резонанса. Действительно, с одной стороны, при наличии такого резонанса воздействие движения на колебания плазмы становится особенно сильным, а с другой, это явление характерно именно для неоднородного движения.

Понятие гидродинамического резонанса позволяет выявить наиболее общие закономерности, определяющие колебательные свойства и устойчивость неоднородных течений произвольных сплошных сред (обычная жидкость, гравитирующие среды и т. д.). Так, с помощью данного понятия удастся с единых позиций интерпретировать основные положения теории устойчивости плоско-параллельных течений обычной жидкости. Устойчивость именно таких течений была изучена впервые с исчерпывающей полнотой. Соответствующая теория стала эталоном для исследования колебаний других сплошных сред,

в том числе плазмы. С учетом этого обстоятельства, а также отмеченной выше универсальности резонансных явлений, глава 3 начинается с краткого изложения основных положений теории устойчивости плоско-параллельных течений обычной жидкости.

Резонансное взаимодействие, будучи фундаментальным физическим явлением, определяет множество физических процессов, протекающих в плазме. Так, обмен энергией и импульсом между электромагнитными колебаниями и частицами плазмы, характерный для фазовых резонансов, ведет к поглощению плазменных колебаний в равновесной плазме и может вызывать их раскачку в неравновесной. Резонансное поглощение лежит в основе большинства методов СВЧ-нагрева плазмы и ряда методов ее диагностики.

Систематический и последовательный анализ резонансного взаимодействия в плазме является целью настоящей работы.

Глава 1

Резонансное взаимодействие в плазме. Общие принципы

1. Резонансное взаимодействие в немагнитной плазме

1.1. Уравнение Власова и индивидуальные степени свободы в плазме. Псевдоволны. Теоретический аппарат, посредством которого изучаются коллективные движения плазмы, основан на кинетическом уравнении с самосогласованными электромагнитными полями — уравнении Власова

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}}) f_j + \frac{e_j}{m} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right) \nabla_{\mathbf{v}} f_j = 0. \quad (1.1)$$

Здесь поля \mathbf{E} и \mathbf{B} находятся с помощью уравнений Максвелла, в которые в качестве источника полей входят заряд $\rho = \sum_j e_j \int f_j(\mathbf{v}) d\mathbf{v}$ и ток $\mathbf{j} = \sum_j e_j \int \mathbf{v} f_j(\mathbf{v}) d\mathbf{v}$, определяемые с помощью решений того же уравнения Власова, индекс j отмечает сорт частиц (электроны, ионы).

В уравнении Власова, как и в уравнении Больцмана, функция f_j — одночастичная функция распределения в фазовом пространстве, усредненная по флуктуациям, обусловленным дискретностью частиц. Для уравнения Больцмана основная сфера практического применения — получение гидродинамических уравнений для моментов функции распределения, с помощью которых можно рассматривать явления, характерный пространственный масштаб которых велик по сравнению с длиной свободного пробега, а временной — по сравнению с временем между столкновениями. В таких явлениях индивидуальность частиц стирается благодаря столкновениям.

В отличие от этого, Власов ввел свое уравнение для исследования коллективных явлений, характерные масштабы которых малы по сравнению со столкновительными.

В некоторых задачах, как например, в задаче о взаимодействии коллективных и индивидуальных степеней свободы, которая будет детально анализироваться ниже, необходимо принимать во внимание оба типа степеней свободы. В связи с этим возникает проблема включения индивидуальных степеней свободы в формализм уравнения Власова. Данная цель в определенной степени достигается введением макроскопических образований, описываемых выражениями вида

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \tilde{f}(\mathbf{v})\tilde{f}(\mathbf{r}_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)), \quad (1.2)$$

где $\tilde{f}(\mathbf{v}) = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{V}_0)$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$.

Подобные образования перемещаются как целое, сохраняя пространственную структуру, чем напоминают отдельные частицы. Будучи макроскопическими, они описывают согласованное движение многих частиц. Однако, в отличие от коллективных возбуждений в образования вида (1.2), частицы объединяются не самосогласованными полями, а начальными условиями. Поэтому объединение имеет чисто механический — формальный характер.

Разумеется, образования вида (1.2) возбуждают электромагнитные поля, которые в свою очередь должны влиять на их движение. Однако если соответствующие возмущения заряда и тока невелики, то влиянием коллективных полей можно пренебречь на достаточно больших интервалах времени. В этом смысле можно считать, что выражения вида (1.2) являются приближенными решениями уравнения Власова. (По этому вопросу более подробно см. ниже.)

Образования вида (1.2) были введены в теорию плазмы Ван-Кампеном, который положил $\tilde{f}(\mathbf{r}_0) = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_0)$ [7]. Подобный объект в лабораторной системе отсчета выглядит как волна заряда, имеющая частоту $\omega = \mathbf{k}\mathbf{V}_0$ (волна Ван-Кампена):

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_1 \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{V}_0 t)].$$

Сходные объекты рассматривались также в теории колебаний неоднородных течений обычной жидкости [8,9]. В этом случае они соответствуют бесконечно тонким струйкам жидкости, переносимым течением, в которых по гармоническому закону модулирован ротор скорости. Поэтому образования вида (1.2) иногда также называют волнами Ван-Кампена–Кэйза. Наряду

с этим используются названия: баллистические моды, волны, вызываемые модулированными пучками, и др. По причинам, которые будут ясны из дальнейшего, мы предпочитаем термин «псевдоволны».

В обычных средах система собственных функций, соответствующая всему набору собственных колебаний, полна. Это позволяет представить возмущение с произвольной пространственной зависимостью в виде набора собственных колебаний и проследить за его эволюцией. В плазме учет индивидуальных степеней свободы требует кинетического описания — фазовое пространство является шестимерным. В фазовом пространстве полным является набор псевдоволн со всеми возможными значениями \mathbf{k} и \mathbf{V}_0 . В силу того, что псевдоволны с фиксированным значением \mathbf{k} образуют непрерывный спектр частот, их также иногда называют волнами непрерывного спектра. Отметим, что в рассматриваемом нами случае однородной неограниченной плазмы спектр коллективных степеней свободы (собственных колебаний) также непрерывен, что обусловлено возможностью непрерывного изменения волнового вектора, однако в отличие от псевдоволн каждому значению волнового вектора соответствует дискретное число собственных значений частоты — по числу ветвей собственных колебаний.

В обычном пространстве полными являются наборы функций, представляющих как самосогласованные собственные колебания, так и псевдоволны с произвольным значением \mathbf{V}_0 . В результате, как было отмечено в [3], задание начальной пространственной зависимости оказывается недостаточным для однозначного определения эволюции возмущений. Неоднозначность проявляется, в частности, в разнообразии законов затухания возмущений в бесстолкновительной плазме. Закон затухания зависит от того, каким образом псевдоволны участвовали в создании первоначальных возмущений. Так, например, пространственно-периодическое возмущение, составленное из частиц с одним и тем же значением скорости $v=V_0$ (элементарная псевдоволна), не затухает со временем, а скорость его перемещения совпадает с V_0 (см. выше). При равномерном распределении частиц по скоростям в некотором интервале ($V_1;V_2$):

$$\tilde{f}(v) = \frac{1}{V_2 - V_1} [\Theta(V_1 - v) - \Theta(V_2 - v)],$$

где $\Theta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда, возмущение можно считать составленным из набора элементарных псевдоволн.

Элементарные псевдоволны с различными значениями скорости смещаются по фазе при распространении, что приводит к «замазыванию» первоначальной пространственной модуляции и затуханию первоначального возмущения

$$\rho(x, t) = \frac{i\rho_1}{kt(V_2 - V_1)} \exp(ikx) [\exp(-ikV_2t) - \exp(-ikV_1t)].$$

Степенные законы затухания характерны также для образований, создаваемых пучками заряженных частиц с неаналитическими функциями распределения по скоростям, производные которых претерпевают скачки. Пространственно-временная зависимость рассматриваемых образований дается выражением

$$\rho(x, t) = \rho_1 e^{ikx} \int \tilde{f}(v) e^{-ikvt} dv. \quad (1.3)$$

Основной член асимптотики (1.3) при $t \rightarrow \infty$ может быть получен интегрированием по частям

$$\rho(x, t) \approx \rho_1 e^{ikx} \Delta \left(\frac{d^n}{dv^n} \tilde{f} \right) \frac{1}{(ikt)^{n+1}},$$

где $\Delta \left(\frac{d^n}{dv^n} \tilde{f} \right)$ — скачок n -й производной функции распределения.

Для аналитических распределений по скоростям $\tilde{f}(v)$ закон затухания при $t \rightarrow \infty$ оказывается чрезвычайно резким — быстрее простого экспоненциального. Так, при гауссовом распределении

$$\tilde{f}(v) = \frac{1}{\pi^{1/2} \delta v} \exp \left[- \left(\frac{v - V_0}{\delta v} \right)^2 \right] \quad (1.4)$$

получаем

$$\rho(x, t) = \rho_1 \exp \left[ik(x - V_0 t) - \left(\frac{kt\delta v}{2} \right)^2 \right]. \quad (1.5)$$

Еще более катастрофичным для псевдоволн оказывается воздействие столкновений. Кулоновские столкновения вызывают диффузию частиц по скоростям. В результате распределение, которое в начальный момент имело вид δ -функции, трансфор-

мируется в гауссовское (1.4). Его разброс возрастает по закону $\delta v = 2(D_v t)^{1/2}$, $D_v \approx \nu v_T^2$, где ν — частота кулоновских столкновений, v_T — тепловая скорость частиц основной плазмы. Подставляя это выражение в (1.5), находим

$$\rho(x, t) = \rho_1 \exp[ik(x - V_0 t) - k^2 D_v t^3]. \quad (1.6)$$

Влияние столкновений на псевдоволны, по-видимому, впервые рассматривалось в [10].

Макроскопические образования, какими являются псевдоволны, разумеется, не эквивалентны индивидуальным степеням свободы. Более того при определенных обстоятельствах стирается различие между ними и самосогласованными колебаниями. Так например, рассмотрим пучок заряженных частиц со скоростью V_0 , степень модуляции которого достаточно мала. В этом случае периодическую модуляцию плотности пучка, создающую псевдоволну, можно рассматривать как возбуждение собственных колебаний пучка. В лабораторной системе отсчета их частота будет отличаться от значения $\omega = kV_0$ на величину порядка плазменной частоты частиц пучка ω_{pb} . Таким образом на достаточно малых интервалах времени $t \ll \omega_{pb}^{-1}$, пока не успели проявиться коллективные эффекты, модулированный пучок ведет себя как псевдоволна, а при $t \geq \omega_{pb}^{-1}$ как система, в которой возбуждены собственные колебания.

Хорошо известно, что в диссипирующей среде собственные колебания затухают примерно по простому экспоненциальному закону вида $\exp(-|\text{Im } \omega| t)$, который разительно отличается от (1.6). Различие вызвано тем, что собственные колебания имеют временную зависимость $\exp(-i\omega t)$ с комплексной частотой в стационарных средах. Между тем, столкновения, изменяя скорость частиц пучка, образующих псевдоволну, делают сам этот пучок нестационарным образованием. В результате его модуляция буквально рассыпается по прошествии некоторого времени (см. (1.4)). Можно сказать, что в реальных условиях, где неизбежны столкновения и другие случайные воздействия, распространение псевдоволн представляет собой лишь имитацию волнового процесса. Это обстоятельство на наш взгляд оправдывает название псевдоволн.

1.2. Бесстолкновительное резонансное взаимодействие и псевдоволны. Проанализируем теперь, следуя [11,12], роль псевдоволн в так называемом бесстолкнови-

тельном резонансном взаимодействии. Пусть вдоль оси OX распространяется волна электрического потенциала

$$\varphi_1(x, t) = \varphi_1 \cos(kx - \omega t).$$

Рассмотрим электроны, движущиеся в том же направлении со скоростью $v = \omega/k$ (резонансные). В областях, где фаза волны $\Phi = kx - \omega t$ меняется в пределах $(2n - 1)\pi < \Phi < 2n\pi$, резонансные частицы ускоряются волной. При этом их функция распределения по скорости v сдвигается вправо, (рис. 1.1).

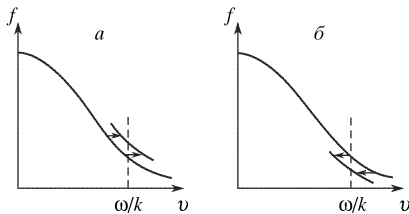


Рис. 1.1. Изменение числа резонансных частиц равновесной плазмы при взаимодействии с колебаниями: *a* — область ускорения $(2n-1)\pi < \Phi < 2n\pi$, *б* — область замедления $2n\pi < \Phi < (2n+1)\pi$

Если ее наклон отрицателен ($df_0/dv < 0$), что характерно для равновесных распределений, то число резонансных частиц в этих областях возрастает. В дополнительных областях, где $2n\pi < \Phi < (2n + 1)\pi$, резонансные частицы замедляются, при этом их число уменьшается. Таким образом, взаимодействие резонансных частиц с волной электрического потенциала приводит к пространственной модуляции их плотности, т.е. возникновению

псевдоволны. Причем максимумы плотности сдвинуты относительно максимумов потенциала на $-\pi/2$ и совпадают с минимумами электрического поля

$$\rho_1(x, t) = -\rho_1 \sin(kx - \omega t).$$

Поэтому усредненная по координате x работа электрического поля над резонансными частицами должна быть положительной

$$W = e \frac{\omega}{k} \left\langle \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \rho_1 \right\rangle_x > 0.$$

Таким образом, как и следовало ожидать, в равновесной плазме волна теряет свою энергию при взаимодействии с резонансными частицами. В то же время нетрудно видеть, что в неравновесной плазме с $df_0/dv > 0$, резонансные частицы будут производить работу над полем, увеличивая его энергию

($W < 0$). Действительно, при $df_0/dv > 0$ максимумы плотности псевдоволны будут приходиться на области замедляющего поля, а минимумы — ускоряющего (рис. 1.2).

Дальнейшая эволюция плазменных колебаний определяется конкуренцией двух процессов: затухания псевдоволны под действием столкновений (характерное время порядка $k^{-2/3} D_v^{-1/3}$) и осцилляций резонансных частиц в потенциальных ямах, создаваемых электрическим полем волны (период осцилляций порядка $(1/k) (m/e\varphi_1)^{1/2}$). Если $e\varphi_1 \gg m (D_v/k)^{2/3}$, то преобладает последний фактор (время затухания превышает период осцилляций), и изменение

скорости резонансных частиц ограничивается их смещением относительно волны — частицы из ускоряющей фазы переходят в замедляющую, и обратно. В результате монотонное изменение скорости заряженных частиц сменяется осциллирующим — резонансные частицы захватываются волной. Усредненное по

осцилляциям распределение плотности заряда симметрично относительно дна потенциальных ям. При этом частицы, для которых разность $v - \omega/k$ в отсутствие волны имела бы одно и то же абсолютное значение, отличаясь только знаком, движутся по одинаковым траекториям — волна конечной амплитуды «усредняет» частицы с одинаковым значением $|v - \omega/k|$. Увеличится или уменьшится в результате энергия волны — зависит от соотношения между числом частиц, опережавших волну и отстававших от нее, т.е. знаком df_0/dv . В дальнейшем слабые кулоновские столкновения приводят к размешиванию захваченных частиц по фазе нелинейных осцилляций. Данный процесс симметризует относительно дна потенциальных ям мгновенное распределение плотности заряда. В конце концов, устанавливается стационарная волна конечной амплитуды, пространственная структура которой усложнена нелинейными осцилляциями захваченных частиц — волна Бернштейна–Грина–Крускала [13].

Если амплитуда самосогласованных колебаний достаточно мала, так что выполняется условие $e\varphi_1 \ll m (D_v/k)^{2/3}$, то нели-

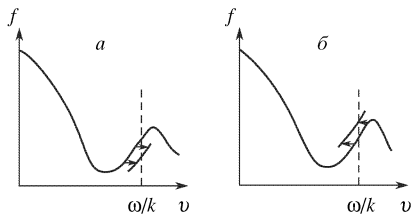


Рис. 1.2. То же, что на предыдущем рисунке в случае неравновесной плазмы.

нейные эффекты оказываются менее существенными, чем столкновительные. Столкновения, как было показано выше, приводят к затуханию псевдволны за характерное время, равное $k^{-2/3} D_v^{-1/3}$. Если столкновительные эффекты преобладают над нелинейными, то псевдволна жестко «привязана» к самосогласованным колебаниям, и ее амплитуда устанавливается в результате баланса двух процессов: создания псевдволны самосогласованными колебаниями и ее разрушения столкновениями. В результате осуществляется стационарный «проток» резонансных частиц через состояние псевдволны.

Стандартная процедура линеаризации уравнения Власова по возмущениям потенциала вида $\varphi_1(x, t) = \varphi_1 \exp[i(kx - \omega t)]$ дает

$$(\omega - kv)f_1 = \frac{ek}{m} \varphi_1 \frac{df_0}{dv}, \quad (1.7)$$

где f_0 — начальная функция распределения, f_1 — ее возмущение. Из (1.7) находим

$$f_1 = \frac{ek}{m} \frac{1}{\omega - kv} \varphi_1 \frac{df_0}{dv}. \quad (1.8)$$

Для действительных значений частоты данное выражение имеет особенность при резонансном значении скорости $v = \omega/k$. Особенность отражает факт неограниченного ускорения электронов, попавших в резонанс с волной, и свидетельствует о чрезмерной идеализации задачи. В реальных условиях ускорение ограничивается физическими эффектами, не учтенными при выводе (1.8). Как было отмечено выше, это — нелинейные эффекты при достаточно большой амплитуде колебаний, и столкновения, если амплитуда не слишком велика. При упрощенном модельном учете столкновений в резонансном знаменателе к частоте добавляется малая мнимая часть $\frac{1}{\omega - kv} \rightarrow \frac{1}{\omega + i\nu - kv}$. Используя соотношение $\frac{\nu}{(\omega - kv)^2 + \nu^2} \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \pi \delta(\omega - kv)$ находим возмущение функции распределения резонансных частиц

$$f_{1s} = \pi \frac{ek}{m} \varphi_1 \left| \frac{df_0}{dv} \right| \delta(\omega - kv) \exp[i(kx - \omega t - \pi\sigma/2)], \quad (1.9)$$

где обозначено $\sigma = \text{sgn}(df_0/dv)$.

Такие характерные особенности (1.9) как наличие резонансной δ -функции, пропорциональность производной df_0/dv , величина фазового сдвига относительно возмущения потенциала позволяют сделать вывод, что это выражение описывает псевдоволну, обсуждавшуюся в начале данного пункта. Вычисляя с помощью соотношения $\rho_{1s} = \int f_{1s}(v)dv$ и выражения (1.9) работы электрического поля волны над электронами, получаем

$$W = e \frac{\omega}{k} \left\langle \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial x} \rho_1 \right\rangle_x = -\pi \frac{\omega e^2}{km} |\varphi_1|^2 \frac{df_0}{dv}.$$

Частота столкновений выпала из выражения для W . Данное обстоятельство служит оправданием термина «бесстолкновительное резонансное взаимодействие». Однако следует помнить, что столкновения играют важную роль в описываемом процессе, подавляя нелинейные эффекты. Учет последних существенно изменил бы выражение для работы (см., например, [14]).

Так же как и слабые столкновения, на бесстолкновительное резонансное взаимодействие влияет эффект возрастания амплитуды колебаний. Если выполняется условие $\text{Im} \omega \gg k(e\varphi_1/m)^{1/2}$, то самосогласованные колебания и порождаемая ими псевдоволна возрастают быстрее, чем резонансные частицы сдвигаются по фазе. В результате нелинейные эффекты не успевают проявиться.

Учет малого инкремента $\gamma = \text{Im} \omega$ аналогично учету слабых столкновений производится переопределением резонансного знаменателя

$$\frac{1}{\omega - kv} \rightarrow \frac{1}{\omega - kv + i\gamma}.$$

При этом для малых значений γ мы приходим к выражению (1.9).

Следует отметить, что знак величины $\text{Im} \frac{1}{\omega - kv + i\gamma}$ меняется с изменением знака γ . Соответственно имеем

$$\text{Im} \frac{1}{\omega - kv + i\gamma} \Big|_{\gamma \rightarrow 0} \rightarrow -\pi \text{sgn} \gamma \delta(\omega - kv). \quad (1.10)$$

Формальное использование этого выражения ведет к противоречию. Так предположим, что $df_0/dv < 0$ и, следовательно,

при резонансном взаимодействии энергия должна отбираться у волны $W > 0$, а сама волна затухать $\gamma < 0$. Однако, используя (1.10) с $\gamma < 0$ при вычислении f_{1s} и W (см. выше) мы приходим к противоположному выводу о том, что энергия накачивается в волну $W < 0$. Введение малой частоты столкновений позволяет избежать противоречия только при небольших значениях $|\gamma|$, когда $\nu + \gamma < 0$.

Для решения проблемы в [3] было предложено при анализе затухающих колебаний в качестве моментов функции распределения $n_1 = \int f_1 dv, \dots$ рассматривать аналитические продолжения выражений, полученных для нарастающих с $\gamma > 0$. Для этого контур интегрирования на плоскости комплексных

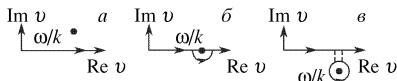


Рис. 1.3. Контур интегрирования по v при вычислении моментов функции распределения $f_1(v)$: $a - \text{Im } \omega > 0$, $b - \text{Im } \omega = 0$, $c - \text{Im } \omega < 0$

значений v должен обходить особенность в точке $v = \frac{\omega + i\gamma}{k}$ снизу вне зависимости от знака γ . Случай затухающих колебаний иллюстрируется рис. 1.3. Деформируя контур интегрирования, можно рассматриваемый интеграл по dv свести к интегралу по действительной оси и вычету в точке $v = (\omega + i\gamma)/k$. Нетрудно видеть, что при $\gamma < 0, |\gamma| \rightarrow 0$ такой способ вычисления эквивалентен использованию соотношения

$$\text{Im} \frac{1}{\omega - kv + i\gamma} \xrightarrow{\gamma \rightarrow 0} -\pi \delta(\omega - kv),$$

при любом знаке γ .

Неравнозначность пределов при различных знаках γ — следствие необратимости бесстолкновительного резонансного взаимодействия, обусловленной влиянием столкновений. Необратимый характер резонансного взаимодействия можно пояснить следующими простыми соображениями [15]. Предположим обратное, что это явление не связано с диссипативными эффектами, т.е. обратимо во времени. Тогда уравнения, описывающие эволюцию плазменных колебаний, должны были бы иметь два решения, отличающиеся направлением времени, и описывающие затухающие и нарастающие колебания. В случае равновесной плазмы это абсурдно. В [15] при анализе эволюции плазменных колебаний для введения элемента необратимости в детерминированные уравнения, вместо одной динамической

системы рассматривался ансамбль систем с равномерным распределением по фазе. Искусственно вводимый эффект размешивания по фазе оказывается сходным с воздействием кулоновских соударений.

Асимметрия пределов $\gamma > 0$ и $\gamma < 0$ отмечалась еще при исследовании устойчивости неоднородных течений идеальной жидкости (см., например, [16]). Учет вязкости, необходимый при анализе резонансного взаимодействия в реальной жидкости, позволяет произвести правильный выбор знака γ . Разумеется, он оказывается таким же, как и в случае плазменных колебаний.

В настоящем пункте проанализирован процесс возбуждения псевдоволн при резонансном взаимодействии самосогласованных колебаний с заряженными частицами. Однако возможно и обратное явление резонансного порождения самосогласованных колебаний псевдоволнами. Оно было обнаружено при кинетическом рассмотрении распространения самосогласованных колебаний в неоднородной плазме [17–19] (см. ниже п. 1.5).

1.3. Последовательный учет столкновений. Правило обхода Ландау. Выше мы видели, что для стационарных возмущений вида $e^{-i\omega t}$ ($-\infty < t < \infty$) модельный учет столкновений позволяет получить непротиворечивые результаты при малых значениях $|\gamma|$, когда $\gamma + \nu > 0$. Добавление к частоте малой мнимой добавки эквивалентно введению в уравнение Власова (1.1) столкновительного члена в виде

$$\text{St}(f) = -\nu(f - f_0).$$

Такой столкновительный член не сохраняет числа частиц. Более адекватна диффузионная форма столкновительного члена, тем более, что, как было показано выше, именно диффузия по скоростям вызывает затухание псевдоволн, что и обуславливает саму возможность описания резонансного взаимодействия в рамках линейного приближения:

$$\text{St}(f) = D_v \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}. \quad (1.11)$$

В [20], а также в других работах (см. ссылки) найдено, что использование такого столкновительного члена в задаче о плазменных колебаниях оказывается эквивалентным подходу работы [3].

Вводя в линеаризованное уравнение Власова столкновительный член в форме (1.11), имеем

$$-iD_v \frac{d^2 f_1}{dv^2} + (\omega - kv)f_1 = \frac{ek}{m} \varphi_1 \frac{df_0}{dv}. \quad (1.12)$$

Переходя к переменной $u = (kv/\omega - 1)/\alpha$, где $\alpha = D_v^{1/3} k^{2/3} \omega^{-1}$, получаем

$$\frac{d^2 f_1}{du^2} - iuf_1 = i \frac{ek}{\alpha \omega m} \varphi_1 \frac{df_0}{dv}. \quad (1.13)$$

Уравнение (1.13) — неоднородное уравнение Эйри. Его решение можно выразить через линейно независимые решения однородного уравнения $g_{1,2}(u)$. В качестве одного из решений выберем функцию $g_1(u) = Ai(ue^{i\pi/6})$, спадающую на действительной положительной полуоси. Чтобы получить второе решение, воспользуемся тем обстоятельством, что уравнение Эйри инвариантно к заменам $u \rightarrow ue^{\pm 2i\pi/3}$. Решение $g_2(u) = Ai(ue^{5i\pi/6})$ спадает в секторе $-11\pi/6 < \arg u < -\pi/2$, в том числе и на отрицательной действительной полуоси. Отметим, что поворот плоскости комплексного u на $-2\pi/3$ дает решение $g_3(u) = Ai(ue^{-i\pi/2})$, которое также понадобится нам в дальнейшем (см. Приложение 1). Оно связано с $g_{1,2}(u)$ соотношением (см., например, [21]):

$$g_1(u) + e^{2i\pi/3} g_2(u) + e^{-2i\pi/3} g_3(u) = 0. \quad (1.14)$$

С помощью функций $g_{1,2}(u)$ решение (1.13), ограниченное при $u \rightarrow \pm\infty$, выражается в виде

$$f_1 = 2\pi i \frac{ek}{\alpha \omega m} \varphi_1 G(u), \quad (1.15)$$

где

$$G(u) = g_1(u) \int_{-\infty}^u g_2(u') \frac{df_0}{dv} du' + g_2(u) \int_u^{\infty} g_1(u') \frac{df_0}{dv} du'.$$

Считая функцию $f_0(v)$ медленно меняющейся на интервалах δv , соответствующих $\delta u \approx 1$, вынесем величину df_0/dv из под знака интегрирования

$$G(u) \approx \frac{df_0}{dv} G_1(u),$$

где

$$G_1(u) = g_1(u) \int_{-\infty}^u g_2(u') du' + g_2(u) \int_u^{\infty} g_1(u') du'. \quad (1.16)$$

Рассмотрение, проведенное в Приложении 1, показывает, что в секторах $S_{1,2}$ (рис. 1.4) для функции $G_1(u)$ справедливо асимптотическое представление:

$$G_1(u) \approx -\frac{i}{2\pi u} \left(1 - \frac{2i}{u^3} + \dots \right). \quad (1.17)$$

Первый член данной асимптотики в (1.17) приводит к обычному бесстолкновительному выражению для f_1 (см. (1.15)); второй — пропорциональный частоте столкновений ($u \propto \nu^{-1/3}$) — учитывает столкновительные поправки.

В секторе комплексного переменного S_3 асимптотика функции $G_1(u)$, а вместе с ней и f_1 , оказываются совершенно иными

$$G_1(u) \approx -\frac{i}{2\pi u} + \frac{1}{2\pi^{1/2} u^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3} u^{3/2} e^{i\pi/4} + \frac{i\pi}{8}\right). \quad (1.18)$$

Выражение (1.18) отличается от (1.17) присутствием экспоненциально нарастающего решения однородного уравнения. С уменьшением частоты столкновений показатель экспоненты в выражении (1.18) возрастает ($u \propto D_v^{-1/3} \propto \nu^{-1/3}$) и в пределе $\nu \rightarrow 0$ стремится к бесконечности. Следовательно, в секторе S_3 в отличие от секторов $S_{1,2}$ отсутствует предельный переход к случаю бесстолкновительной плазмы. В этом секторе при определении f_1 столкновительные эффекты необходимо учитывать, как бы ни была мала частота столкновений. Однако обычно интерес представляет не сама функция распределения f_1 , а ее моменты, например, возмущение плотности n_1 . При вычислении моментов контур интегрирования по $du(v = \omega/k + u)$

можно сместить в комплексную плоскость так, чтобы он обходил сектор S_3 снизу, где для f_1 справедлива бесстолкновительная асимптотика. Нетрудно видеть, что данное правило обхода совпадает с правилом обхода Ландау.

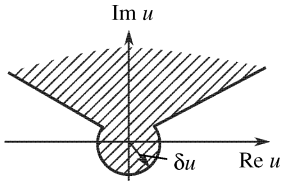


Рис. 1.4. Плоскость комплексного переменного $u = (kv/\omega - 1)/\alpha$: область, в которой необходимо учитывать влияние столкновений, заштрихована; $\delta u \approx 1$

Таким образом, роль столкновений сводится только к регуляризации промежуточных выкладок, а окончательные выражения для моментов оказываются бесстолкновительными.

Изменение вида асимптотики аналитической функции, следствием которого является правило обхода Ландау, называется явлением Стокса (см., например, [22]). С ним связаны и другие важные физические эффекты, в частности, отражение волн, падающих на область непрозрачности. Последняя задача, как известно, описывается однородным уравнением Эйри. В силу явления Стокса решение, экспоненциально спадающее в глубь области непрозрачности, в области прозрачности имеет асимптотику, состоящую из двух экспонент, описывающих падающую и отраженную волны.

1.4. Затухающие колебания и столкновения. В п. 1.3 мы нашли, что в секторе S_3 комплексного переменного v , выходящем из точки $v = \omega/k$, необходимо учитывать

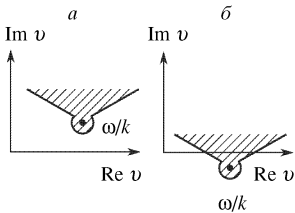


Рис. 1.5. Плоскость комплексного переменного v (область, в которой нужно учитывать влияние столкновений заштрихована): $a - \text{Im } \omega > 0$, $b - \text{Im } \omega < 0$

столкновительные эффекты при любой частоте столкновений, как бы мала она ни была. Если рассматриваются нарастающие колебания ($\text{Im } \omega > \alpha\omega$), то этот сектор настолько поднимается над действительной осью, что при всех действительных значениях v можно использовать асимптотическое выражение (1.8) для f_1 . В этом случае влияние столкновений на колебания мало, и его можно учитывать в качестве поправки. В то же время при $\text{Im } \omega < 0$ сектор S_3 пересекает действительную ось, и следовательно, столкновительные

эффекты для затухающих колебаний должны быть весьма существенны (рис. 1.5).

Чтобы выяснить причину асимметрии по отношению к знаку $\text{Im } \omega$ обратимся к решению кинетического уравнения методом интегрирования по траекториям

$$f_1 = i \frac{ke}{m} \varphi_1 \frac{df_0}{dv} \int_{-\infty}^t \varphi_1(t', x(t')) dt', \quad (1.19)$$

В бесстолкновительном пределе имеем

$$f_1 = i \frac{ke}{m} \varphi_1 \frac{df_0}{dv} \int_{-\infty}^t \exp [i(kv - \omega)t'] dt' \quad (1.20)$$

Интеграл в (1.20) сходится при $\text{Im } \omega > 0$ и расходится при $\text{Im } \omega < 0$. Его сходимость при $\text{Im } \omega < 0$ можно обеспечить учетом столкновений. Под их влиянием скорость электрона становится случайной величиной. Рассмотрим случайный ансамбль электронов, скорость которых при $t = t'$ принимает фиксированное значение v . Будем описывать ансамбль функцией $F(v', t'; v, t)$. Зависимости этой функции от параметров начального (v', t') и конечного (v, t) состояний определяются так называемым первым и вторым уравнениями Колмогорова (см., например, [23]). Первое уравнение Колмогорова для рассматриваемого процесса имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t'} + D_v \frac{\partial^2 F}{\partial v'^2} = 0. \quad (1.21)$$

Второе совпадает с известным уравнением Фоккера–Планка, отличаясь от первого знаком перед диффузионным слагаемым. Различие уравнений, описывающих эволюцию ансамбля «вперед» и «назад» во времени вызвано необратимостью рассматриваемого процесса. Из (1.21) находим

$$F(v', t'; v, t) = \frac{1}{[2\pi D_v(t - t')]^{1/2}} \exp \left[-\frac{(v' - v)^2}{2\pi D_v(t - t')} \right].$$

Данное выражение описывает ансамбль электронов, из которых при $t' = t$ формируется распределение в виде δ -функции.

Заменяя в (1.20) v случайной величиной v' и усредняя по ансамблю, получаем

$$f_1 = i \frac{ke}{m} \varphi_1 \frac{df_0}{dv} \int_{-\infty}^t \exp \left[i(kv - \omega)t' - \frac{1}{2} k^2 D_v (t - t')^3 \right] dt'.$$

Последний интеграл сходится при любых значениях $\text{Im } \omega$, в том числе и при $\text{Im } \omega < 0$.

Хотя при $\text{Im } \omega < 0$ столкновения влияют на вид функции распределения, интегральные величины, как например, возмущение плотности, а вместе с ним и отклик плазмы на колебания, могут иметь бесстолкновительный вид. Возмущение плотности дается выражением

$$n_1 = i \frac{ek}{m} \varphi_1 \int \frac{df_0}{dv} dv \int_{-\infty}^t \exp \left[i(kv - \omega)t' - \frac{1}{2} k^2 D_v (t - t')^3 \right] dt'. \quad (1.22)$$

Будем считать начальное распределение частиц по скоростям максвелловским $f_0(v) = (\pi^{1/2} v_T)^{-1} \exp \left[- (v/v_T)^2 \right]$. Поменяем в (1.22) порядок интегрирования и вычислим сначала интеграл по скоростям

$$n_1 = -2 \frac{en_0}{mv_T^2} \varphi_1 \left\{ 1 + i\omega \int_{-\infty}^0 \exp \left[-i\omega\tau + \frac{1}{2} k^2 D_v \tau^3 - \frac{1}{2} (kv_T\tau)^2 \right] d\tau \right\}, \quad (1.23)$$

где $\tau = t' - t$.

Перемена порядка интегрирования законна, если интеграл по dt' в (1.22) сходится равномерно на всем интервале изменения v . Это справедливо для нарастающих колебаний с $\text{Im } \omega > 0$. При $\text{Im } \omega < 0$ выражение для n_1 (1.22) приобретает смысл благодаря учету столкновений. Однако при выполнении условия $D_v \ll \frac{kv_T^2}{|\text{Im } \omega|}$ интеграл в (1.23) определяется такими значениями τ , при которых слагаемое в экспоненте, пропорциональное D_v , несущественно. Таким образом, столкновения, обуславливая возможность принятого способа расчета n_1 , не входят в окончательное выражение для этой величины.

Интегрирование в бесстолкновительном пределе по $d\tau$ в (1.23) дает хорошо известное выражение (см., например, [24])

$$n_1 = -\frac{2e}{mv_T^2} \varphi_1 n_0 \left[1 + i\pi^{1/2} \xi W(\xi) \right],$$

где $W(\xi)$ — интеграл вероятности от комплексного аргумента $\xi = \omega/kv_T$.

Обсуждаемая асимметрия по отношению к знаку $\text{Im } \omega$ проявляется в виде асимптотики функции $W(\xi)$ (см., например, [24])

$$W(\xi) \approx \begin{cases} \frac{i}{\pi^{1/2}\xi} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2} + \dots \right) + e^{-\xi^2}, & |\text{Im } \xi| < |\text{Re } \xi|, \\ \frac{i}{\pi^{1/2}\xi} \left(1 + \frac{1}{2\xi^2} + \dots \right) + e^{-\xi^2} (1 - \text{sgn } \text{Im } \xi), & |\text{Im } \xi| > |\text{Re } \xi|. \end{cases}$$

Учитывая это выражение находим, что для незатухающих ($\text{Im } \omega \geq 0$) и слабозатухающих ($\text{Im } \omega < 0, |\text{Im } \omega| < |\text{Re } \omega|$) колебаний асимптотика n_1 при $|\xi| \gg 1$ дается «гидродинамическим» выражением

$$n_1 \approx \frac{k^2 \omega_{pe}^2}{4\pi e \omega^2} \varphi_1,$$

где ω_{pe} — электронная ленгмюровская частота. В то же время для сильнозатухающих колебаний ($|\text{Im } \omega| > |\text{Re } \omega|$) кинетические эффекты теплового движения электронов необходимо учитывать при любой, как угодно малой температуре электронов. На рис. 1.6 область, в которой существенны кинетические эффекты, заштрихована. Нетрудно усмотреть аналогию со столкновительными эффектами, которые, вообще говоря, необходимо принимать во внимание при анализе колебаний с $\text{Im } \omega \leq 0$ (см. рис. 1.5).

Проведенное обсуждение показывает, что процедура аналитического продолжения, с помощью которой в [3] анализировались затухающие колебания, состоит в использовании одного и того же аналитического выражения для возмущения плотности вне зависимости от знака $\text{Im } \omega$. Оно может быть получено

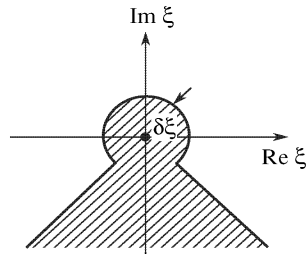


Рис. 1.6. Плоскость комплексного переменного $\xi = \omega/kv_T$ (область, в которой необходимо учитывать эффекты теплового движения электронов, заштрихована; $\delta\xi \approx 1$)

изменением порядка интегрирования по времени и скорости в промежуточных выкладках. Если $\text{Im } \omega \leq 0$, это законно лишь при учете столкновений.

1.5. Резонансное взаимодействие и псевдоволны в неоднородной плазме. В неоднородной плазме как фазовая скорость колебаний, так и скорость заряженных частиц меняются с координатами. Поэтому в неоднородных системах резонансное взаимодействие может протекать весьма своеобразно. В настоящем пункте мы ограничимся случаем сравнительно слабой неоднородности, когда можно говорить о ее влиянии на резонансное взаимодействие, но не о коренном изменении самого характера последнего. Однако, как мы увидим ниже, даже слабая неоднородность плазмы может влиять на резонансное взаимодействие весьма существенно.

Действительно, в неоднородной плазме резонансное условие $\omega = kv$ выполняется лишь в отдельных точках, а область в которой заряженные частицы эффективно (резонансно) обмениваются энергией и импульсом с колебаниями, ограничена окрестностью этих точек. Размер области резонансного взаимодействия определяется выражением для фазы волны на траектории частицы $x(t)$:

$$\Phi(t) = -\omega t + \int_{t_s}^t k(t')v(t')dt'.$$

Разлагая подинтегральное выражение в ряд по $t - t_s$, где t_s момент прохождения частицей точки резонанса, получаем

$$\Phi(t) \approx \Phi(t_s) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(kv) \Big|_{t=t_s} (t - t_s)^2 + \dots$$

Естественно оценить длительность резонансного взаимодействия $\Delta_s t$ из условия $|\Phi(t) - \Phi(t_s)| \leq 1$. При этом находим

$$\Delta_s t \approx \left| \frac{d}{dt}(kv) \Big|_{t=t_s} \right|^{-1/2}.$$

Размер резонансной зоны $\Delta_s x$ равен расстоянию, пройденному частицей за это время $\Delta_s x \approx v \Delta_s t$.

Приведенные соображения показывают, что неоднородность плазмы наряду со столкновениями и нелинейными эффектами может ограничивать длительность резонансного взаимодействия, а следовательно, и его интенсивность. Неоднородность

также способствует выявлению псевдоволн на фоне самосогласованных колебаний. Действительно, в однородной плазме псевдоволны жестко связаны с возбуждающими их самосогласованными колебаниями, в частности, имеют ту же пространственную структуру. Поэтому их трудно отличить друг от друга. В неоднородной плазме скорости заряженных частиц и самосогласованных колебаний, вообще говоря, меняются в пространстве по разному.

Поэтому за пределами зоны резонансного взаимодействия должны наблюдаться два волновых процесса одной частоты, распространяющихся с различной фазовой скоростью, и следовательно, имеющих различную пространственную структуру. Отметим, однако, что и в однородной плазме при локальном совместном возбуждении псевдоволн и самосогласованных колебаний их можно различить ввиду разных значений групповой скорости [25]. (У псевдоволн дисперсия отсутствует, и поэтому их групповая скорость равна фазовой.)

Проанализируем резонансное взаимодействие в неоднородной плазме на примере электронных ленгмюровских колебаний плазмы, помещенной в сильное магнитное поле. Данная задача была детально исследована в [17] (см. также приведенные в этой работе ссылки) в связи с проблемой устойчивости плазмы в адиабатических ловушках. В таких системах функция распределения ионов по скоростям, как правило, неравновесна — анизотропна.

Анизотропия функции распределения может приводить к раскачке замагниченных электронных ленгмюровских колебаний (конусная неустойчивость), причем неустойчивость является сносовой. Колебания раскачиваются в центральной части ловушки, где их фазовая скорость вдоль магнитного поля значительно превышает тепловую скорость электронов. Однако по мере движения колебаний к торцам ловушки фазовая скорость падает.

В результате, в конце концов, становится возможным резонансное взаимодействие с продольным движением электронов, приводящее к поглощению колебаний. Выше было показано, что при этом возникает псевдоволна, движущаяся со скоростью резонансных электронов. В адиабатических ловушках электроны удерживаются амбиполярным потенциалом. Резонансные электроны после отражения от потенциального барьера возвращаются в точку резонанса. В этой точке их скорость по абсолютной величине равна фазовой скорости первичных самосогласован-

ных колебаний, но направлена им навстречу. При прохождении псевдоволны, составленной из таких электронов, через резонансную точку в ней должен происходить процесс, обратный резонансному поглощению — возбуждение самосогласованных колебаний псевдоволной.

Возбуждаемые таким образом колебания выглядят как отраженные от торца ловушки. При достаточно эффективном отражении сносная конусная неустойчивость может стать гораздо более опасной — абсолютной. По этой причине несколько отвлеченный вопрос о величине коэффициента отражения, названного в [17] нелокальным, приобрел практическое значение, и ему был посвящен ряд работ (см. ссылки в [17]).

Как и в этих работах, рассмотрим резонансное взаимодействие электронов с ленгмюровскими колебаниями плазмы в достаточно сильном магнитном поле. Присутствие магнитного поля упрощает задачу, так как в нем электроны «привязываются» к силовым линиям — их движение становится одномерным. Будем считать, что параметры плазмы меняются вдоль магнитного поля, в поперечном направлении систему считаем однородной. Линеаризуя уравнение движения электронов и уравнение неразрывности, а также используя уравнение Пуассона, получаем

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^2 \frac{d\varphi_1}{dz} + k_{\perp}^2 \varphi_1 = -4\pi e n_{1s}. \quad (1.24)$$

Здесь $\varphi_1(\mathbf{r}, t) = \varphi_1(z) \exp[i(k_{\perp}x - \omega t)]$ — возмущение электрического потенциала; используется декартова система координат с осью OX , направленной поперек магнитного поля, и OZ — вдоль него, значки «перпендикулярно» и «параллельно» отмечают направление относительно магнитного поля. При выводе (1.24) предполагалось, что тепловая скорость основной массы электронов мала по сравнению с фазовой скоростью волны ω/k . Вклад малой доли резонансных электронов учтен в правой части (1.24)

$$n_{1s} = \int f_{1s}(v_{\parallel}) dv_{\parallel}. \quad (1.25)$$

Здесь f_{1s} определяется кинетическим уравнением

$$\frac{df_{1s}}{dt} = -ev_{\parallel} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}, \quad (1.26)$$

где d/dt — производная по времени на траектории электрона.

Для $\varphi_1(z)$, считая неоднородность достаточно слабой, используем квазиклассическое представление

$$\varphi_1(z) \approx k_{\parallel}^{1/2}(z) \exp \left\{ i \left[\int^z k_{\parallel}(z') dz' + k_{\perp} x - \omega t \right] \right\}.$$

Здесь предэкспоненциальный множитель отличается от обычного, поскольку в уравнении (1.24) присутствует член с первой производной от φ_1 .

Учитывая соотношение $d/dt = \partial/\partial t + v_{\parallel} \partial/\partial z$, представим решение (1.26) в виде

$$f_{1s} = -e \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\parallel}} \varphi_1 \times \\ \times \left\{ 1 + i\omega \int_{-\infty}^t \left[\frac{k_{\parallel}(z(t'))}{k_{\parallel}(z)} \right]^{1/2} \exp \left[-i\omega(t-t) + i \int_z^{z(t')} k_{\parallel}(z') dz' \right] dt' \right\}. \quad (1.27)$$

Поскольку в подынтегральном выражении в (1.27) присутствует быстроосциллирующая экспонента, значение интеграла определяется точками стационарной фазы и конечной точкой интервала интегрирования. Вклад последней в интеграл дает обычное гидродинамическое выражение для n_1 , которое уже учтено в (1.24).

Точки стационарной фазы фазового множителя в (1.27), как легко видеть, являются точками черенковского резонанса. Их учет методом стационарной фазы приводит к выражению

$$f_{1s} \approx -e \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\parallel}} \varphi_1 i\omega \left[\frac{k_{\parallel}(z_s)}{k_{\parallel}(z)} \frac{2\pi i}{\Phi'_{tt}(t_s)} \right]^{1/2} \exp [i\Phi(z, z_s)], \quad (1.28)$$

где z_s — точка черенковского резонанса, t_s — момент прохождения этой точки, $\Phi(z, z_s) = \int_{z_s}^z \left[\frac{\omega}{v_{\parallel}(z')} - k_{\parallel}(z') \right] dz'$. Полная фаза f_{1s} дается выражением

$$\Psi(t, z) = -\omega t + \int^z k_{\parallel}(z') dz' + \Phi(z, z_s) = -\omega t + \int_{z_s}^z k_{\parallel}(z') dz' + \omega \int_{z_s}^z \frac{dz'}{v_{\parallel}(z')}.$$

Из него следует, что самосогласованные колебания, доходя до точки z_s , возбуждают в ней волну электрического заряда, распространяющуюся с продольной скоростью электронов v_{\parallel} и, соответственно, с волновым числом ω/v_{\parallel} (псевдодолна). Потенциал псевдодолны определяется (1.24), (1.25), (1.28).

Решение уравнения (1.24) с помощью функции Грина $G(z, z')$ представим в виде

$$\varphi_1(z) = -4\pi e \int \left(\frac{\omega}{\omega_{pe}} \right)^2 n_{1s}(z_0) G(z, z_0) dz_0. \quad (1.29)$$

В квазиклассическом приближении функция Грина дается выражением

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2i} [k_{\parallel}(z)k_{\parallel}(z_0)]^{1/2} \exp \left[i \operatorname{sgn}(z - z_0) \int_{z_0}^z k_{\parallel}(z_0) dz_0 \right].$$

В ограниченной плазме электроны осциллируют вдоль магнитного поля между точками поворота, положение которых определяется амбиполярным электрическим потенциалом и энергией продольного движения электронов. При отражении от точки поворота изменяется знак скорости электрона, а вместе с ним и знак волнового числа псевдоволны.

С учетом отражения фаза псевдоволны дается выражением:

$$\Psi(t, z) = -\omega t + \int_{z_s}^{z_s} k_{\parallel}(z') dz' + \omega \int_{z_s}^{z_r} \frac{dz'}{v_{\parallel}(z')} - \omega \int_{z_r}^z \frac{dz'}{v_{\parallel}(z')},$$

где z_r — точка отражения электрона.

Когда псевдоволна после отражения возвращается в точку z_s , в этой точке должен идти процесс, обратный тому, который привел к возникновению псевдоволны. А именно, псевдоволна должна порождать самосогласованные колебания. Эти колебания будут распространяться навстречу первичным, т.е. выглядеть как отраженные.

Для расчета «отраженной» волны поменяем в (1.29) порядок интегрирования и интеграл по dz_0 рассчитаем методом стационарной фазы

$$\begin{aligned} \varphi_{1r} \approx & \frac{8i\pi^2 e^2 \omega^3}{\omega_{pe}^2} k_{\parallel}^{1/2}(z) \times \\ & \times \int \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \frac{k_{\parallel}(z_s)}{[\Phi''_{tt}(t_s)\Phi''_{zz}(z_s)]^{1/2}} \exp [i\Psi(t, z, z_r, z_s)] d\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Здесь z_r, z_s — координаты точки отражения электрона от потенциального барьера и точки резонанса зависят от энергии электрона. Выражение для фазы в (1.30)

$$\Psi(t, z, z_r, z_s) = -\omega t + \int_{z_s}^{z_s} k_{\parallel}(z') dz' + 2\omega \int_{z_s}^{z_r} \frac{dz'}{v_{\parallel}(z')} - \int_{z_s}^z k_{\parallel}(z') dz' \quad (1.31)$$

позволяет проследить за всей последовательностью анализируемых процессов: распространение самосогласованных колебаний со стороны отрицательных значений z до точки стационарной фазы z_s , возникновение в этой точке псевдоволны и ее движение до точки отражения электронов z_r и обратно, и наконец, появление в этой точке «отраженных» самосогласованных колебаний.

Соответствующие этим процессам приращения фазы даются тремя последними слагаемыми в (1.31). Полный набег фазы зависит от энергии электрона, в результате в (1.30) приходится интегрировать быстроосциллирующую экспоненту. Результат интегрирования существенно отличен от нуля (не экспоненциально мал по параметру $L\omega/v_{\parallel} \gg 1$, L — характерный масштаб неоднородности), лишь если выполняется условие

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[\int_{z_s(\varepsilon)}^{z_s(\varepsilon)} k_{\parallel}(z') dz' + \omega \int_{z_s(\varepsilon)}^{z_r(\varepsilon)} \frac{dz'}{v_{\parallel}(z')} \right]_{\varepsilon=\varepsilon_S} = 0, \quad (1.32)$$

т.е. в распределении электронов по энергии имеется значение ε_S , для которого полная фаза является стационарной. В (1.32) нижний предел интегрирования в первом слагаемом должен лежать за точкой резонанса основной массы электронов. Конкретные расчеты коэффициента отражения можно найти в [17] и приведенных в этой работе ссылках. Физический эффект, сходный с нелокальным отражением, был рассмотрен в [18,19]. В этих работах анализировалось проникновение самосогласованных колебаний через волновые барьеры, проницаемые для заряженных частиц.

Предположим, что в области перед волновым барьером при резонансном взаимодействии возбуждается псевдоволна, которая затем проникает через барьер. Если в забарьерной области найдется точка резонанса с самосогласованными колебаниями, то в этой точке псевдоволна будет порождать самосогласованные колебания, распространяющиеся в том же направлении, что и первоначальные. Данный эффект в [18,19] был назван просветлением волновых барьеров.

1.6. Резонансное взаимодействие при скачках скорости заряженных частиц. В п. 1.5 рассматривалось резонансное взаимодействие при плавном изменении скорости заряженных частиц с характерным временным масштабом, намного превышающим период колебаний электрического поля. Теперь обратимся к обратному предельному случаю. Резкие изменения скорости могут происходить, например, на границе плазмы. Довольно часто используется приближение резкой границы, зеркально отражающей заряженные частицы. В рамках этой идеализации считается, что скорость при отражении мгновенно меняет знак.

Впервые резонансное взаимодействие в плазме с такой границей неявно учитывалось в [3] в задаче о возбуждении колебаний в полуограниченной плазме. Позднее в [26] было показано, что приграничные эффекты приводят к частичному поглощению электромагнитных волн, падающих на резкую границу металла. Колебания плазмы с резкой границей анализировались в ряде работ (см., например, [27]).

Рассмотрим взаимодействие электронов с электростатическими колебаниями полуограниченной плазмы при условии зеркального отражения электронов от границы. Возмущение потенциала выберем в виде $\varphi_1(z, t) = \varphi_1(z) \exp(-i\omega t)$.

Используя кинетическое уравнение (1.26), в котором под $v_{||}$ понимается скорость, перпендикулярная границе, обозначаемая в дальнейшем как v , и соотношение

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = -i\omega\varphi_1 + v\frac{\partial\varphi_1}{\partial z},$$

представим возмущение функции распределения в виде, сходном с (1.27),

$$f_1 = -e\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \left[\varphi_1 + i\omega \int_{-\infty}^t \varphi_1(t', z(t')) dt' \right]. \quad (1.33)$$

Переходя в (1.33) от интегрирования по времени к интегрированию по координате и учитывая соотношение

$$\rho_1(z) = -e \int f_1(z, v) dv,$$

связывающее возмущение плотности заряда с f_1 , получаем

$$\rho_1(z) = e^2 n_0 \int_0^\infty \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \left\{ 2\varphi_1(z) + \frac{i\omega}{v} \int_0^\infty \varphi_1(z') \left[\exp\left(\frac{i\omega}{v} |z-z'|\right) + \exp\left(\frac{i\omega}{v} (z+z')\right) \right] dz' \right\} dv \quad (1.34)$$

Здесь v — модуль скорости, и подынтегральное выражение при каждом значении v учитывает вклады частиц, приходящих в точку z с противоположных сторон (оба знака скорости).

Рассмотрим асимптотику полученного выражения в случае высокочастотных колебаний ($\omega \gg v_T/L$, v_T — характерное значение скорости электронов, L — характерный пространственный масштаб возмущения потенциала). Ввиду наличия в (1.34) быстро меняющейся экспоненты значение интеграла по dz' определяется конечными точками интервала интегрирования (см., например, [28]).

Вычисляя интеграл с точностью до членов второго порядка по $v_T/\omega L$, получаем

$$\rho_1(z) \approx -2i \frac{e^2 n_0}{\omega} \varphi'(0) \int_0^\infty v \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \exp\left(\frac{i\omega z}{v}\right) dv. \quad (1.35)$$

Мощность, поглощаемая электронами, дается выражением

$$\begin{aligned} Q &= \operatorname{Re} \int_0^\infty j_1(z) E_1^*(z) dz = -\omega \operatorname{Im} \int_0^\infty \rho_1(z) \varphi_1^*(z) dz = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega}\right)^2 |E_1(0)|^2 \int_0^\infty v f_0(v) dv. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Здесь учтено, что $j_1(z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} 0$.

Характерная особенность выражения (1.36) — его пропорциональность квадрату амплитуды возмущенного электрического поля в граничной точке. Постараемся понять чем обусловлена ее выделенность. Нами рассматриваются медленные частицы с $v \ll \omega L$. Если бы они двигались равномерно во всем интерва-

ле $-\infty < t < \infty$, то для резонанса с колебаниями в разложении Фурье возмущенного электрического поля должны были бы присутствовать гармоники с $k = \omega/v$. При аналитической зависимости $\varphi_1(z)$ с характерным масштабом L вес гармоник с $k \gg 1/L$ должен быть пренебрежимо (экспоненциально) мал. Однако в силу того, что в граничных точках скорость частиц меняет знак, электрический потенциал на траектории частицы оказывается неаналитической функцией времени (рис. 1.7). По этой причине с ростом частоты Ω амплитуда фурье-гармоник во временном разложении Фурье

$$\varphi_{1\Omega} = \int e^{-i\Omega t} \varphi_1(z(t)) dt$$

уменьшается не по экспоненциальному закону, а значительно медленнее — по степенному $\varphi_{1\Omega} \approx -(2v/\Omega^2)\varphi_1'(0)$. Вследствие этого с колебаниями довольно эффективно взаимодействуют все частицы, а не только такие, скорость которых $v \approx L\omega$. В результате при уменьшении теплового разброса поглощаемая мощность спадает всего лишь по степенному закону: $Q \propto vT$ (см. (1.36)), а не по экспоненциальному, например типа $Q \propto \exp[-(L\omega/vT)^2]$.

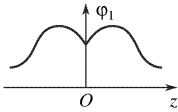


Рис. 1.7. Возмущение потенциала, симметрично продолженное на всю действительную ось

Выделение резонансных фурье-гармоник при расчете поглощаемой мощности соответствует «размазыванию» резонансного взаимодействия на весь рассматриваемый временной интервал. В противоположность этому в методе интегрирования по траекториям, использованном выше при получении $\rho_1(z)$ (см. (1.34)) интеграл по времени определяется моментами прохождения электронов через граничные точки. С учетом (1.35) это свидетельствует о локализации области обмена энергией между колебаниями и электронами в окрестности данной точки. Разумеется, оба метода дают один и тот же результат. Рассмотренное выше движение в полупространстве $0 < z < \infty$ эквивалентно равномерному движению в потенциале, продолженном на всю действительную ось по закону $\varphi_1(z) = \varphi_1(-z)$ (см. рис. 1.7).

При равномерном движении заряженных частиц возмущенные функции распределения дается выражением

$$f_{1k}(v) = \frac{en_0}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{k}{\omega - kv} \varphi_{1k}. \quad (1.37)$$

Получая с помощью (1.37) возмущение плотности электронов и учитывая (1.36), находим

$$Q = \frac{e^2 n_0}{2\pi m} \int v \frac{\partial f_0}{\partial v} \int k^2 |\varphi_{1k}|^2 \operatorname{Im} \frac{1}{\omega - kv} dk dv. \quad (1.38)$$

Для равномерного движения со скоростью v имеем $\varphi_{1k} = \varphi_{1\Omega} v$, где $\Omega = kv$. Если положить $\varphi_{1\Omega} = -(2v/\Omega^2) \varphi_1'(0)$ (см. выше) и использовать известное соотношение $\operatorname{Im} \frac{1}{\omega - kv} = -\pi \delta(\omega - kv)$, то нетрудно показать, что данное выражение совпадает с (1.36).

Представляет интерес пространственная зависимость возмущений плотности заряда. Предположим, что расстояние от границы превышает v_T/ω . Используя при интегрировании по dv в (1.35) метод перевала, в случае максвелловского распределения электронов по скоростям $f_0(v) = 1/(\sqrt{\pi}v_T) \exp[-(v/v_T)^2]$ получаем

$$\rho_1(z) \approx \frac{2^{7/6} e^2 n_0 z^{1/3}}{3^{1/2} m \omega^{2/3} v_T^{4/3}} \varphi_1'(0) \exp \left[\frac{i\pi}{3} - 3 \left(\frac{\omega z}{2v_T} \right)^{2/3} e^{-i\pi/3} \right].$$

Смысл полученного выражения достаточно прост. Взаимодействие с электрическим полем на границе приводит к возбуждению псевдволн, уходящих от нее со скоростью заряженных частиц $\exp(-i\omega t + i\omega z/v)$. В случае размытых распределений по скоростям, типа максвелловского, их суперпозиция довольно резко затухает с удалением от границы. Отметим, что характерный для максвелловского распределения закон затухания ($\exp(-\alpha z^{2/3})$) был впервые получен в [3] при анализе задачи о колебаниях полугораниченной плазмы, возбуждаемых на ее границе.

Явления, рассматривавшиеся в настоящем пункте, обусловлены неаналитичностью временной зависимости электрического потенциала на траектории частицы $\varphi_1(t) = \varphi_1(t, z(t)) = \varphi_1(z(t)) e^{-i\omega t}$. При этом функция $\varphi_1(z)$ предполагалась аналитической, а неаналитичность зависимости $\varphi_1(t)$ вызывалась скачками скорости. Если заряженная частица проходит через резкую границу двух сред, отличающихся диэлектрическими свойствами, неаналитической оказывается пространственная зависимость $\varphi_1(z)$. В этом случае резонансное взаимодействие становится возможным даже при равномерном движении частиц. Явления, возникающие при пересечении резкой границы, принято называть переходными (см., например, [29]).

Глава 2

Резонансное взаимодействие в магнитном поле

2. Циклотронное резонансное взаимодействие в линейном приближении

2.1. Механизм циклотронного резонансного взаимодействия. В магнитном поле условие резонанса заряженной частицы с гармонической электромагнитной волной $\exp[i(-\omega t + \mathbf{k}\mathbf{r})]$ имеет вид

$$\omega = n\omega_e + k_{\parallel}v_{\parallel}. \quad (2.1)$$

Здесь для определенности рассматриваются электроны, $\omega_e = eBc/\varepsilon$ — электронная циклотронная частота.

Условие (2.1) принято называть циклотронным резонансным условием. Оно обобщает условие черенковского резонанса на случай замагниченной плазмы. Проанализируем некоторые общие свойства резонансного взаимодействия заряженных частиц с электромагнитными колебаниями. Прежде всего, следуя [11], выясним физический смысл резонансного условия (2.1). С этой целью рассмотрим выражение для изменения энергии электрона

$$\dot{\varepsilon} = \mathbf{v}\dot{\mathbf{p}} = -e(\mathbf{v}\mathbf{E}). \quad (2.2)$$

Здесь $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$, используется декартова система координат с осью OX в плоскости векторов \mathbf{k} и \mathbf{B}_0 и осью OZ , направленной вдоль основного магнитного поля. В правой части (2.2) $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ — невозмущенные волной скорость и радиус-вектор электрона:

$$\mathbf{v} = (v_{\perp} \cos \varphi(t), v_{\perp} \sin \varphi(t), v_{\parallel}), \\ \mathbf{r}(t) = \{x_0 + \rho_e [\sin \varphi(t) - \sin \varphi_0], y_0 - \rho_e [\cos \varphi(t) - \cos \varphi_0], z_0 + v_{\parallel} t\},$$

где $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_e t$, $\rho_e = v_{\perp}/\omega_e$ — ларморовский радиус электрона.

Вместо декартовых компонент электрического поля, перпендикулярных основному магнитному полю, удобно ввести циркулярно поляризованные, вращающиеся в ионную сторону (левая поляризация) и в электронную (правая):

$$E_{\pm} = (E_x \pm iE_y) / \sqrt{2}.$$

Будем использовать также аналогичные по виду выражения для скорости

$$v_{\pm} = \frac{(v_x \pm iv_y)}{\sqrt{2}} = \frac{v_{\perp}}{\sqrt{2}} \exp(\pm i\varphi(t)).$$

В терминах циркулярных величин v_{\pm} , E_{\pm} уравнение (2.2) принимает вид

$$\dot{\varepsilon} = -e(v_{-}E_{+} + v_{+}E_{-} + v_{\parallel}E_{\parallel}).$$

Геометрия движения электрона в магнитном поле (ларморовское вращение) не согласована с геометрией плоской волны. Поэтому зависимость электрического поля волны от времени на траектории электрона довольно сложна ($E(t) \propto \exp[ik_{\perp}\rho_e \sin \varphi(t)]$) и существенно отличается от простой гармонической.

Согласование геометрий достигается посредством представления плоской волны в виде набора цилиндрических волн, вращающихся коаксиально с данным электроном:

$$\exp(-i\omega t + ik_{\perp}x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(k_{\perp}\rho) \exp(-i\omega t + im\varphi), \quad (2.3)$$

где ρ, φ — цилиндрические координаты в системе, центр которой совпадает с центром ларморовской окружности электрона $x = \rho \sin \varphi$, функция Бесселя $J_m(k_{\perp}\rho)$ дает радиальное распределение амплитуды цилиндрической волны с азимутальным волновым числом m . На траектории электрона $\rho = \rho_e$, $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_e t$. Суммарный доплеровский сдвиг, определяемый движением вдоль основного магнитного поля и ларморовским вращением, для m -й цилиндрической составляющей плоской волны равен $m\omega_e + k_{\parallel}v_{\parallel}$. Соответственно, частота этой составляющей в системе отсчета, связанной с электроном, дается выражением

$$\omega'_m = \omega - m\omega_e - k_{\parallel}v_{\parallel}.$$

С помощью (2.3) представим уравнение (2.2) в виде

$$\dot{\epsilon} = -e \exp(-i\omega t + ik_{\parallel}v_{\parallel}t) \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il(\omega_e t + \varphi_0)} \times \\ \times \left[\frac{v_{\perp}}{\sqrt{2}} E_{-} J_{l-1}(k_{\perp}\rho_e) + v_{\parallel} E_{\parallel} J_l(k_{\perp}\rho_e) + \frac{v_{\perp}}{\sqrt{2}} E_{+} J_{l+1}(k_{\perp}\rho_e) \right]. \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует, что если выполняется условие циклотронного резонанса (2.1) и электрическое поле плоской волны вращается в электронную сторону ($E = E_{-}$), то систематические изменения энергии электрона обусловлены цилиндрической составляющей плоской волны с азимутальным номером $m = n - 1$ и амплитудой $J_{n-1}(k_{\perp}\rho_e)$. Действительно, частота такой волны на траектории электрона равна $\omega'_m = \omega_e$, но с такой же частотой вращается вектор скорости электрона. Поэтому при выполнении условия $\omega'_m = \omega_e$ проекция переменного правополяризованного электрического поля на направление скорости ларморовского вращения должна быть постоянна. В результате в соответствии с (2.2) становится возможным регулярное изменение энергии.

Продольная компонента электрического поля E_{\parallel} взаимодействует с продольным движением, скорость которого v_{\parallel} не меняется во времени. В этом случае для систематического изменения энергии требуется постоянство электрического поля на траектории электрона ($\omega'_m = 0$), что имеет место для цилиндрической составляющей с азимутальным волновым числом $m = n$. Ее амплитуда на траектории электрона равна $J_n(k_{\perp}\rho_e)$.

Наконец, рассмотрим взаимодействие электрона с волной, электрическое поле которой вращается в ионную сторону $E = E_{+}$. Для резонансного обмена энергией с такой волной необходимо, чтобы суммарный доплеровский сдвиг превысил частоту волны $\omega'_m = \omega - m\omega_e - k_{\parallel}v_{\parallel} < 0$. При этом на траектории электрона обращается направление временной зависимости электрического поля, и следовательно, оно начинает вращаться в противоположном направлении, т.е. в электронную сторону. Иными словами левополяризованное поле для электрона становится правополяризованным. Если $\omega'_m = -\omega_e$ ($m = n + 1$), то становится возможным систематический обмен энергией с электрическим полем, вращающимся в ионную сторону. Амплитуда соответствующей цилиндрической гармоники в разложении (2.3) равна $J_{n+1}(k_{\perp}\rho_e)$.

Как правило, в экспериментальных условиях выполняется неравенство $k_{\perp}\rho_e \ll 1$, и соответственно, для функций Бесселя в (2.3), (2.4) справедливо представление

$$J_n(k_{\perp}\rho_e) \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{k_{\perp}\rho_e}{2} \right)^n.$$

В этом случае, как следует из (2.4), электроны взаимодействуют наиболее эффективно с волной, электрическое поле которой вращается в электронную сторону, и наименее эффективно при обратном направлении вращения. Взаимодействие с волной с продольной поляризацией электрического поля по своей интенсивности является промежуточным.

Для систем с магнитным удержанием характерна не плоская, а скорее цилиндрическая геометрия. При анализе крупномасштабных электромагнитных колебаний в таких системах естественно представлять их в виде набора волн, бегущих по азимуту ψ , с радиальной зависимостью, задаваемой функциями Бесселя:

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t) = \sum_n \mathbf{E}_{nm} J_m(k_{nm}r) \exp(-i\omega t + im\psi). \quad (2.5)$$

Выделение из данного электрического поля составляющих, вращающихся коаксиально с заряженными частицами, осуществляется с помощью формулы Графа (см., например, [30]) которая для цилиндрической геометрии играет ту же роль, что разложение (2.3) для плоской:

$$J_m(kr)e^{im\psi} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_{m+p}(ka)J_p(kr')e^{ip\psi'}.$$

Здесь r', ψ' — координаты в новой системе, центр которой смещен относительно точки $r = 0$ на a вдоль луча $\psi = 0$. Формула Графа использовалась для анализа циклотронного резонансного взаимодействия в ряде работ (см., например, [11,31]).

Другой подход к выделению резонансных составляющих в цилиндрической геометрии основан на том обстоятельстве, что сочетания $r^{\pm} = x \pm iy$ сравнительно просто зависят от времени на траектории заряженной частицы (электрона), вращающейся по ларморовской окружности $r^{\pm}(t) = r_L^{\pm} + \rho \exp[\pm i(\omega_e t + C)]$, где r_L^{\pm} — значение величины r^{\pm} , в центре ларморовской окружности.

Полезные формулы, которые можно использовать для выделения резонансных составляющих в случае малого ларморовского радиуса, приведены в [32]. При произвольной величине ларморовского радиуса такой подход становится удобным, если пространственную зависимость электрического поля выражать через функции

$$E_{nm}(\mathbf{r}) = e^{\pm im\psi} r^m F_{nm}(r^2) = (r^\pm)^m F_{nm}(r^+ r^-),$$

где F_{nm} — полином степени n [11,33]. Отметим, что в функции Бесселя в (2.5), в качестве сомножителей входят бесконечные полиномы от r^2 .

В начале термоядерных исследований был создан ряд адиабатических ловушек, в которых ионы имели ларморовский радиус, сравнимый с радиусом системы, причем центры ларморовских окружностей ионов располагались на оси ловушек (ОГРА-1, АС и др.). Геометрия колебаний таких систем согласована с геометрией ларморовского вращения, что значительно упрощает анализ резонансного циклотронного взаимодействия. При этом само ларморовское вращение может быть учтено в рамках системы гидродинамических уравнений (см. [11] и приведенные ссылки).

2.2. Интеграл движения. Как и в п. 2.1, рассмотрим взаимодействие заряженной частицы (электрона), помещенной в стационарное магнитное поле, с плоской электромагнитной волной. Уравнение движения электрона, линеаризованное по возмущениям, вызываемым электромагнитным полем, имеет вид

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = -e \left(\mathbf{E}_1 + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_1 \mathbf{B}_0 + \mathbf{v}_0 \mathbf{B}_1] \right),$$

где \mathbf{B}_0 — стационарное магнитное поле, $\mathbf{v}_0(t)$ — скорость движения электрона в нем; индексом «1» отмечено малое переменное электромагнитное поле и возмущения импульса и скорости электрона, вызываемые им.

Используя одно из уравнений Максвелла, находим связь между электрическим и магнитным полями колебаний в рассматриваемой нами плоской волне:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{c}{\omega} [\mathbf{k} \mathbf{E}_1].$$

Подставляя данное выражение в уравнение движения электрона, приводим его к виду

$$\dot{\mathbf{p}}_1 + \omega_e [\mathbf{p}_1 \mathbf{b}] = -e \left[\mathbf{E}_1 \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}_0}{\omega} \right) + \frac{\mathbf{k}}{\omega} (\mathbf{v}_0 \mathbf{E}_1) \right]. \quad (2.6)$$

Здесь электронная циклотронная частота рассчитывается по невозмущенному магнитному полю \mathbf{B}_0 , $\mathbf{b} = \mathbf{B}_0/B_0$.

Проекция (2.6) на направление постоянного магнитного поля дает

$$\dot{p}_{\parallel 1} = -e \left[E_{\parallel 1} \left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}_0}{\omega} \right) + \frac{k_{\parallel}}{\omega} (\mathbf{v}_0 \mathbf{E}_1) \right]. \quad (2.7)$$

Для рассматриваемой нами плоской гармонической волны справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt} \mathbf{E}_1(t, \mathbf{r}_0(t)) = -i[\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_0(t)] \mathbf{E}_0(t, \mathbf{r}_0(t)),$$

где $\mathbf{r}_0(t)$ — траектория электрона, $\mathbf{v}_0(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_0(t)$. Поэтому первое слагаемое в скобках в правой части (2.7) может быть представлено в виде $i \frac{d}{dt} \mathbf{E}_{\parallel 1}(t)$. Комбинация (2.7) и линеаризованного уравнения (2.2), помноженного на k_{\parallel}/ω , приводит к соотношению

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{k_{\parallel}}{\omega} \varepsilon - p_{\parallel} + \frac{e}{\omega} E_{\parallel 1} \right) = 0. \quad (2.8)$$

В состоянии резонанса, как следует из (2.8), продольный импульс электрона наряду с систематическим изменением испытывает также осцилляции с амплитудой $eE_{\parallel 1}/\omega$. При достаточно большом времени резонансного взаимодействия $\Delta t \gg (k_{\parallel} v_{\parallel})^{-1}$ систематическое изменение p_{\parallel} намного превышает осцилляционное. В этом случае можно положить

$$\varepsilon - \frac{\omega}{k_{\parallel}} p_{\parallel} \approx \text{const}, \quad (2.9)$$

где p_{\parallel} — величина, усредненная по осцилляциям.

Дифференциальным эквивалентом (2.9) является соотношение (2.8) с опущенным третьим слагаемым в скобках

$$\dot{\varepsilon} - \frac{\omega}{k_{\parallel}} \dot{p}_{\parallel} = 0. \quad (2.10)$$

Соотношения (2.9), (2.10) можно трактовать как следствие квантованности электромагнитного поля. При поглощении (из-

лучении) кванта заряженные частицы получают (теряют) энергию $\Delta\varepsilon = \hbar\omega$ и импульс $\Delta\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Внешнее постоянное магнитное поле действует на поперечную (по отношению к нему) составляющую импульса \mathbf{p}_\perp , поэтому в системе волна–частица наряду с энергией сохраняется только продольная компонента импульса. Это обстоятельство отражают соотношения (2.9), (2.10).

Производная $\dot{\varepsilon}$ может быть разложена на составляющие $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_\perp + \dot{\varepsilon}_\parallel$, где $\dot{\varepsilon}_{\perp,\parallel} = \frac{c^2}{2\varepsilon}(\dot{p}_{\perp,\parallel}^2)$. (Следует отметить, что для самой величины ε такое разложение возможно лишь в нерелятивистском пределе.)

Учитывая (2.1), (2.10), находим

$$\frac{\dot{\varepsilon}_\parallel}{\dot{\varepsilon}_\perp} = \frac{k_\parallel v_\parallel}{n\omega_e}. \quad (2.11)$$

Из (2.6) следует, что соотношение между составляющими изменения энергии не зависит от поляризации электромагнитного поля и целиком определяется относительным весом слагаемых $n\omega_e$ и $k_\parallel v_\parallel$ в правой части резонансного условия (2.1). Это приводит к результатам, которые на первый взгляд могут показаться парадоксальными.

Так, например, рассмотрим обыкновенные колебания плазмы, распространяющиеся поперек магнитного поля. Их электрическое поле направлено вдоль основного магнитного поля $E_\perp = 0, E_\parallel \neq 0$ (см., например, [24]). Тем не менее в соответствии с (2.11) при взаимодействии с такими колебаниями должен меняться лишь поперечный импульс $\langle \dot{\varepsilon}_\perp \rangle \neq 0, \langle \dot{\varepsilon}_\parallel \rangle = 0$. Парадокс разрешается, если учесть действие магнитного поля волны. В правой части (2.6), (2.7) ему обязаны слагаемые, содержащие компоненты волнового вектора \mathbf{k} . Как следует из этих соотношений, переменное магнитное поле, не влияя на полное изменение энергии, подстраивает значения $\dot{\varepsilon}_\perp, \dot{\varepsilon}_\parallel$ так, чтобы выполнялось соотношение (2.11). В обсуждаемом случае обыкновенных колебаний с $k_\parallel = 0$ оно полностью переводит $\dot{\varepsilon}_\parallel$ в $\dot{\varepsilon}_\perp$.

Переход от соотношения (2.8) к (2.9), (2.10) оправдан на достаточно больших интервалах времени (см. выше). Вместе с тем время резонансного взаимодействия ограничивается рядом факторов (столкновения, нелинейность, неоднородность системы). В условиях реальных магнитных ловушек, как правило, преобладает влияние неоднородности магнитного поля. Частицы, удерживаемые в таких системах, осциллируют вдоль магнит-

ного поля, и периодически проходят через точку циклотронного резонанса, определяемую условием (2.1). Длительность резонансного взаимодействия зависит от степени неоднородности магнитного поля и будет оценена в дальнейшем. В каждый последующий акт резонансного взаимодействия частица вступает с несколько иным значением p_{\parallel} . Вариации этой величины вызваны как ее непосредственным изменением при резонансном взаимодействии с волной, так и смещением точки циклотронного резонанса из-за изменений ε и p_{\parallel} . (Движение вдоль неоднородного магнитного поля вызывает изменение p_{\parallel} даже в отсутствие электромагнитных полей.) Последний фактор приводит к тому, что значение константы в (2.9) пришлось бы менять от одного акта резонансного взаимодействия к другому. Данное обстоятельство затрудняет практическое использование приближенного интеграла (2.9).

Отмеченная трудность отпадает, если вместо p_{\parallel} использовать величину $\mu = \frac{p_{\perp}^2}{2m\omega_{e0}}$, сохраняющуюся при движении в неоднородном стационарном магнитном поле (поперечный адиабатический инвариант). Используя выражение для энергии в виде

$$\varepsilon = \sqrt{(mc^2)^2 + 2mc^2\omega_{e0}\mu + c^2p_{\parallel}^2},$$

а также (2.1) и (2.10), находим

$$\dot{\mu} = (n/\omega)\dot{\varepsilon}. \quad (2.12)$$

Интегрируя данное уравнение по времени, получаем

$$\mu - (n/\omega)\varepsilon = \text{const}. \quad (2.13)$$

Таким образом, если движение заряженных частиц в стационарном магнитном поле характеризуется двумя интегралами движения ε и μ , то в присутствии монохроматической электромагнитной волны сохраняется только их линейная комбинация.

На фазовой плоскости она определяет кривую, вдоль которой могут перемещаться электроны в результате ЭЦР-взаимодействия. В случае электромагнитного поля с более сложной временной зависимостью, отличающейся от простой гармонической, доступными становятся двумерные области фазовой плоскости.

Соотношения (2.12), (2.13) так же, как и (2.9), (2.10), допускают простую квантовомеханическую трактовку. В магнит-

ном поле ларморовское вращение квантовано, так что возможны только дискретные значения величины μ (см., например, [34]):

$$\mu = \hbar(s + 1/2). \quad (2.14)$$

В нерелятивистском приближении из (2.14) получаем уровни Ландау:

$$\varepsilon_{\perp} = \mu\omega_{e0} = \hbar\omega_{e0}(s + 1/2).$$

Соотношения (2.12), (2.13) показывают, что поглощение (излучение) кванта с энергией $\Delta\varepsilon = \hbar\omega$ сопровождается переходом на n уровней (2.14) $\Delta\mu = \hbar n$.

2.3. Эволюция орбит заряженных частиц в магнитных ловушках при циклотронном резонансном взаимодействии. Описание эволюции функции распределения заряженных частиц в магнитных ловушках становится более наглядным, если вместо ε и μ использовать значения $p_{\parallel 0}, p_{\perp 0}$, привязанные к какой-то фиксированной точке силовой линии магнитного поля s_0 , на которой удерживаются рассматриваемые частицы. В отсутствие переменных электромагнитных полей эти величины также являются интегралами движения, будучи связанными с ε и μ соотношениями

$$\varepsilon = \sqrt{(mc^2)^2 + c^2(p_{\perp 0}^2 + p_{\parallel 0}^2)}, \quad \mu = \frac{p_{\perp 0}^2}{2m\omega_{e0}(s_0)}.$$

В качестве точки s_0 удобно взять точку минимума магнитного поля, так как через эту точку проходят все частицы, и следовательно, распределение по новым интегралам движения $p_{\perp 0}, p_{\parallel 0}$ получается максимально представительным.

Линия $p_{\parallel 0} = p_{\perp 0}\sqrt{R-1}$, где $R = \omega_{e0,\max}/\omega_{e0,\min}$, делит фазовую плоскость на две части (рис. 2.1). Выше ее лежат так называемые запертые частицы, осциллирующие вдоль магнитной силовой линии относительно минимума магнитного поля. Ниже прямой l располагаются частицы, которые в случае токамаков называются пролетными. Они совершают полный оборот по тору. В случае открытых ловушек такие частицы уходят из системы, и область под прямой l называется конусом потерь.

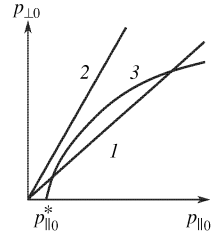
Уравнение (2.13) определяет семейство кривых, по которым при ЭЦР-взаимодействии смещаются электроны на фазовой плоскости. Проанализируем общий характер движения, следуя работам [35] ($N_{\parallel} = 0$) и [36] (общий случай). Кривые (2.13)

удобно параметризовать значением $p_{\parallel 0}^*$, которое имели бы на них электроны при $p_{\perp 0} = 0$. В области малых нерелятивистских энергий кривые аппроксимируются гиперболами

$$p_{\parallel 0}^2 - p_{\perp 0}^2 \left(\frac{\omega}{n\omega_{e0,\min}} - 1 \right) = p_{\parallel 0}^{*2}. \quad (2.15)$$

Двигаясь по ним, частицы переходят из пролетных в запертые, и по мере нагрева степень их «запертости» повышается — точка остановки электронов при продольном движении смещается в сторону меньших значений магнитного поля. Она асимптотически стремится к точке нерелятивистского циклотронного резонанса, определяемой соотношением $\omega = n\omega_{e0}(s)$. Асимптотой гипербола (2.15) является прямая

$$p_{\parallel 0} = p_{\perp 0} \left(\frac{\omega}{n\omega_{e0,\min}} - 1 \right)^{1/2}.$$



В результате на начальной нерелятивистской стадии ЭЦР-нагрева образуется группа электронов, останавливающихся в окрестности одной и той же точки. Данные электроны называются плещущимися. Такой характер эволюции электронных орбит объясняется преимущественным увеличением поперечной энергии нерелятивистских электронов (см. (2.11)). Однако при переходе в область релятивистских энергий из-за уменьшения циклотронной частоты и увеличения скорости преобладающим становится эффект продольного ускорения электронов.

При прохождении через точку циклотронного резонанса электроны как бы подталкиваются электромагнитной волной.

В результате размах продольных осцилляций электронов возрастает, и в конце концов, они переходят из запертых в пролетные в случае замкнутых ловушек или покидают ловушки открытые — пересекают линию 1 на рис. 2.1. Особенно простой характер динамика ЭЦР-взаимодействия приобретает в ультрарелятивистской области

Рис. 2.1. Фазовая плоскость заряженных частиц (электронов) в магнитных ловушках: 1 — граница запертых и пролетных частиц (токамаки) или граница конуса потерь (открытые ловушки), 2 — линия, на которой располагаются электроны, останавливающиеся в точке нерелятивистского циклотронного резонанса ($\omega = n\omega_{e0}(s)$), 3 — одна из семейства кривых, по которым движутся электроны в процессе ЭЦР-нагрева

$p \gg mc$, где уравнение (2.13) при нерелятивистском «начальном» импульсе $p_{\parallel 0}$ принимает вид

$$p_{\parallel 0} \approx \frac{\omega}{n\omega_{e0}} \frac{p_{\perp 0}^2}{2mc}.$$

Значение нерелятивистской циклотронной частоты в точке остановки электрона $\omega_{e0, \text{st}}$ дается выражением

$$\Omega_{\text{st}} = \frac{n\omega_{e0, \text{st}}}{\omega} = \frac{\left(M + \sqrt{1 + q_{\parallel}^{*2}}\right)^2 - 1}{2M}, \quad (2.16)$$

где $M = \frac{\omega}{n} \frac{\mu}{mc^2}$, $q_{\parallel}^* = \frac{p_{\parallel 0}^*}{mc}$. Соотношение (2.16) получено с помощью (2.13) и выражения для энергии электрона при $p_{\parallel} = 0$.

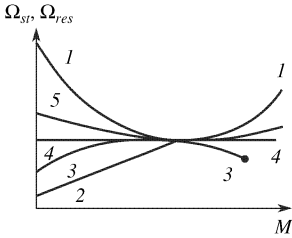
Данное выражение иллюстрирует отмеченную выше немонотонность изменения $\omega_{e0, \text{st}}$ в процессе нагрева (изменения M) (рис. 2.2).

Условие совпадения $\omega_{e0, \text{st}}$ с $\omega_{e0, \text{max}}$ определяет максимальную энергию, до которой могут быть нагреты электроны [36]. В приближении $q_{\parallel}^{*2} \ll 1$ получаем

$$\gamma_{\text{max}} \approx 2 \frac{n\omega_{e0, \text{max}}}{\omega} - 1. \quad (2.17)$$

Рис. 2.2. Изменение резонансного магнитного поля ($\Omega_{\text{res}} = n\omega_{e0, \text{res}}/\omega$) и магнитного поля в точке остановки электрона ($\Omega_{\text{st}} = n\omega_{e0, \text{st}}/\omega$) в процессе ЭЦР-нагрева ($M = \mu\omega/(nmc^2)$): 1 — Ω_{st} , 2 — Ω_{res} при $N_{\parallel} = 0$, 3 — Ω_{res} при $0 < N_{\parallel} < 1$, 4 — Ω_{res} при $N_{\parallel} = 1$, 5 — Ω_{res} при $N_{\parallel} > 1$, $N_{\parallel} > 0$.

Изложенные соображения имеют под собой простой и ясный фундамент, и их справедливость не вызывает сомнений. Однако в реальных условиях картина ЭЦР-нагрева могла бы быть усложнена за счет множества факторов, не учитывавшихся в описанной выше упрощенной модели явления. Из них в первую очередь следует отметить неустойчивости, которые характерны для плазмы с неравновесной функцией распределения, возникающей в процессе ЭЦР-нагрева. Поэтому представляется не вполне тривиальным, что эксперименты на открытой ловушке ОГРА-4 подтвердили описанную выше картину [37,38]. В этой установке плазма получалась ионизацией



нейтрального газа, и поэтому начальная температура электронов была невелика (≤ 10 эВ). Такие электроны располагаются на рис. 2.3 в окрестности начала координат и удерживаются в ловушке так называемым амбиполярным электрическим потенциалом.

Под действием ЭЦР из этой области вдоль кривых (2.13) вытягивается «струя», пересекающая границу конуса потерь в области релятивистских энергий. Максимальное значение энергии электронов согласуется с выражением (2.17). Соответствует экспериментальному распределению и распределение электронов вдоль «струи», рассчитанное в рамках квазилинейной теории.

Как и следовало ожидать, интенсивный выброс электронов наблюдался только во время ЭЦР-нагрева, когда в ловушку вводилось излучение гиротрона. Ввод излучения осуществлялся вдоль магнитного поля через одну из пробок ловушки, а электроны выбрасывались в основном через противоположную пробку, т.е. в направлении распространения электромагнитных колебаний. Этот результат вполне естествен, поскольку, как было пояснено выше, выброс обязан давлению электромагнитного поля, которое воспринимается электронами при поглощении колебаний. (При мощности гиротрона 1 МВт сила давления излучения по порядку величины равна примерно 1 г.)

Проведенный анализ естественно предполагает, что во время нагрева в какой-то точке на траектории электрона выполняется условие циклотронного резонанса (2.1). Выясним насколько справедливо это предположение.

Используя (2.1), (2.13), и выражение для энергии электрона, находим значение циклотронной частоты (нерелятивистской) в точке резонанса

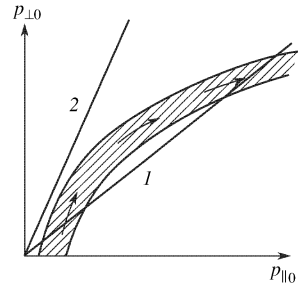


Рис. 2.3. Возникновение «струи» высокоэнергичных электронов при ЭЦР-нагреве (заштриховано) в магнитных ловушках: обозначения те же, что и на рис. 2.1.

$$\Omega_{\text{res}} = \frac{n\omega_{e0,\text{res}}}{\omega} = \sqrt{1 + q_{\parallel}^{*2}} + M(1 - N_{\parallel}^2) \pm N_{\parallel} \sqrt{M^2(N_{\parallel}^2 - 1) + q_{\parallel}^{*2}}. \quad (2.18)$$

Продольный импульс электрона в этой точке определяется следующим выражением:

$$q_{\parallel, \text{res}} = MN_{\parallel} \mp \sqrt{M^2(N_{\parallel}^2 - 1) + q_{\parallel}^{*2}}, \quad (2.19)$$

знак $q_{\parallel, \text{res}}$ считается положительным для электронов, движущихся в направлении распространения колебаний и отрицательным — навстречу им.

Положение резонансной точки и характер ее движения в процессе нагрева, определяемые (2.13), существенно зависят от величины N_{\parallel} . При $N_{\parallel} = 0$ релятивистский эффект уменьшения циклотронной частоты с ростом энергии приводит к смещению точки циклотронного резонанса в область больших магнитных полей.

Между тем точка остановки электрона, как было показано выше, на начальном этапе нагрева смещается в противоположном направлении — в сторону меньших значений магнитного поля. Нагрев прекращается, когда две эти точки встречаются (см. рис. 2.2), при этом $M = q_{\parallel}^*$ и

$$\Omega_{\text{res}} = \frac{n\omega_{e0, \text{res}}}{\omega} = \sqrt{1 + q_{\parallel}^{*2}} + q_{\parallel}^*.$$

В силу резонансного условия (2.1) эта же величина равна максимальному значению релятивистского γ -фактора ($\gamma = \varepsilon/mc^2$), которое могут достичь электроны в процессе нагрева.

Если значения N_{\parallel} не слишком велики ($N_{\parallel} < 1$), то основным фактором, определяющим положение резонансной точки, остается релятивистская зависимость циклотронной частоты от энергии электрона.

Эффект Доплера приводит к расщеплению зависимости $\Omega_{\text{res}}(M)$ на две в соответствии с двумя возможными знаками продольной скорости в точке резонанса. Электроны, движущиеся навстречу волне, тормозятся ею, и при $M = q_{\parallel}^*$, как и в случае $N_{\parallel} = 0$, резонансная точка совпадает с точкой остановки (см. рис. 2.2). Однако если $N_{\parallel} \neq 0$, то нагрев на этом не прекращается.

При значениях $M > q_{\parallel}^*$ точка остановки электрона и точка резонанса расходятся, и знак скорости электрона в точке резонанса меняется (см. (2.19)). В этой области значений M электрон, двигаясь в направлении распространения колебаний, дважды в течение одного полупериода осцилляций вдоль ловушки попадает в резонанс с волной.

Нагрев прекращается при $M_{\max} = q_{\parallel}^* / \sqrt{1 - N_{\parallel}^2}$, когда

$$\gamma_{\max} = \frac{q_{\parallel}^*}{\sqrt{1 - N_{\parallel}^2}} + \sqrt{1 + q_{\parallel}^{*2}}.$$

Значение $N_{\parallel} = 1$, при котором нагрев может быть неограниченным, является выделенным. ЭЦР-взаимодействие с такими колебаниями происходит в режиме авторезонанса — т. е. без нарушения резонансного условия [39,40]. Действительно, это условие можно представить в виде

$$\varepsilon - cN_{\parallel}p_{\parallel} = \frac{n\omega_{e0}}{\omega}mc^2.$$

Нетрудно видеть, что оно совпадает с (2.9) при $N_{\parallel} = k_{\parallel}c/\omega = 1$, $\text{const} = (n\omega_{e0}/\omega)mc^2$. Если магнитное поле неоднородно, то в режиме авторезонанса резонансная точка остается неподвижной (см. рис. 2.2). Это обстоятельство делает возможным неограниченное ускорение электронов в замкнутых системах. В открытых — в силу одновременного неограниченного увеличения p_{\parallel} , ускорение прекращается при выходе частиц через пробки.

Неограниченное ускорение в замкнутых системах возможно также и при $N_{\parallel} > 1$, однако для этого, как следует из (2.18), необходим бесконечный перепад магнитного поля. Отметим, что при $N_{\parallel} \geq 1$, так же как и в случае $N_{\parallel} < 1$, резонансная точка совпадает с точкой остановки для $M = q_{\parallel}^*$. В области $M > q_{\parallel}^*$ резонанс осуществляется только при попутном движении электронов ($q_{\parallel,\text{res}}^* > 0$) (см. (2.19)).

Проведенный анализ предполагает, что электромагнитное поле присутствует на всей электронной орбите. Между тем электромагнитные колебания, используемые для ЭЦР-нагрева, часто вводятся в ловушки в виде пространственно-ограниченного волнового пучка, пересекающего магнитные силовые линии, вдоль которых движутся электроны. В этом случае ЭЦР-взаимодействие прекратится, если из-за изменения параметров электрона резонансная точка выйдет за пределы пучка. Выход обуславливается неоднородностью магнитного поля реальных ловушек. Момент выхода может быть определен с помощью рис. 2.2.

Однако и в том случае, когда электромагнитные колебания вводятся вдоль магнитного поля, как, например, в [37,38], эффекты, обусловленные неоднородностью электромагнитного поля, также могут оказаться весьма существенными. В условиях

[37,38] в области прозрачности (между пробкой, ближайшей к гиротрону, и точкой нерелятивистского циклотронного резонанса) неоднородность электромагнитного поля вызывается поглощением его энергии электронами. В этой области $\omega_{e0}(s) > \omega$, и следовательно, в силу соотношения $N^2 \approx 1 + \omega_{pe}^2/(\omega_{e0}^2 - \omega^2)$ (см., например, [24]) продольный показатель преломления превышает единицу. Выше отмечалось, что если $N_{\parallel} > 1$, и энергия электронов достаточно велика ($M > q_{\parallel}^*$), то резонансная точка по мере нагрева должна смещаться в сторону большего магнитного поля. Поэтому в условиях [37,38] первыми с электромагнитными колебаниями должны взаимодействовать высокоэнергичные электроны («струи», см. выше). Из-за поглощения этими электронами электромагнитные колебания могут не дойти до точки нерелятивистского циклотронного резонанса. В этом случае низкоэнергичные электроны окажутся выключенными из ЭЦР-взаимодействия, а в ловушке наряду с высокоэнергичной популяцией будет наблюдаться и низкоэнергичная. Одновременное существование двух групп электронов действительно имело место в экспериментах [37,38]. На первый взгляд присутствие электронов с энергией $E \leq 10$ эВ представлялось парадоксальным, поскольку в условиях обсуждаемых экспериментов они должны были бы набирать энергию $E \approx 10^2 \div 10^3$ эВ в одном акте ЭЦР-взаимодействия. Следует отметить, что источником высокоэнергичной струи являются холодные электроны. По-видимому, в реальных условиях функция распределения электронов вдоль «струи» и пространственное распределение электромагнитного поля подстраиваются таким образом, чтобы обеспечить подпитку струи наиболее энергичными из популяции холодных электронов.

Выше обсуждалась проблема циклотронного нагрева электронов, между тем с помощью циклотронного резонансного взаимодействия можно также возбуждать электрический ток в замкнутых системах. В настоящее время для возбуждения тока в основном используется метод Фиша–Бузера. В этом методе ток создается в результате ЭЦР-взаимодействия основной массы нерелятивистских электронов [41]. В механизме Фиша–Бузера существенную роль играют столкновения. Общая идея метода иллюстрируется рис. 2.4. Считаем, что в начальный момент распределение изотропно по скоростям — ток отсутствует. ЭЦР-взаимодействие приводит к преимущественному увеличению поперечной энергии нерелятивистских элек-

тронов $c, v_{\parallel} \approx (\omega - n\omega_e)/k_{\parallel}$. Частота кулоновских столкновений этих электронов падает. При качественной трактовке механизма возбуждения тока будем их считать бесстолкновительными. Оставшаяся часть функции распределения электронов изотропизируется кулоновскими столкновениями. Между тем полная функция распределения остается анизотропной, что свидетельствует о возбуждении тока. Отметим, что направление средней по распределению скорости движения электронов может как совпадать с направлением распространения электромагнитных колебаний, если $\omega > n\omega_e$, так и быть обратным последнему при $\omega < n\omega_e$.

Разумеется, ток может возбуждаться и без участия

столкновений прямым давлением электромагнитного поля, поглощаемого электронами. В этом случае ток будет переноситься небольшой группой — «струей» высокоэнергичных электронов (см. выше).

Создание «струи» следует осуществлять в режиме близком к авторезонансному, как было предложено в [42,43]. Если условие авторезонанса $N_{\parallel} = 1$ не выполнено, то из-за того, что в замкнутых системах магнитное поле обычно меняется в небольших пределах, резонансная точка, как было отмечено выше, в конце концов, выйдет за пределы системы в процессе ЭЦР-взаимодействия.

3. Циклотронное резонансное взаимодействие с волной конечной амплитуды

3.1. Второй фундаментальный гамильтониан. Монотонное изменение параметров заряженных частиц при резонансном взаимодействии с монохроматическими электромагнитными колебаниями может ограничиваться рядом факторов, в том числе, нелинейными эффектами (см. п. 1.1). Нелинейная динамика заряженных частиц в потенциальных колебаниях, как известно, описывается гамильтонианом, имеющим вид гамильтониана нелинейного маятника. В случае простейших непотенциальных колебаний ту же роль играет гамильтониан, который

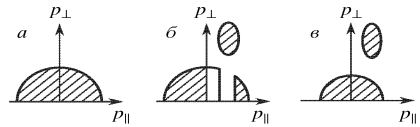


Рис. 2.4. Схема генерации тока по механизму Фиша-Бузера: *a* — начальное состояние, *b* — деформация функции распределения при ЭЦР-нагреве, *v* — изотропизация «холодных» электронов под действием кулоновских столкновений

иногда называют гамильтонианом второй фундаментальной модели или просто вторым фундаментальным гамильтонианом [44,45]. Второй фундаментальный гамильтониан, так же как и первый (гамильтониан нелинейного маятника), встречается во многих задачах, что и оправдывает его название. В качестве примеров можно указать задачу трех тел (движение астероида в поле тяготения Солнца и Юпитера) [44,45], задачу о колебаниях пузырьков в жидкости [46] и множество плазменных задач (см., например, [47-50]).

Если первый фундаментальный гамильтониан позволяет исследовать резонансное взаимодействие в нелинейном режиме, то возможности второго более обширны — с его помощью можно проанализировать возникновение самого явления резонанса при изменении параметров системы. С этой целью, следуя [45], рассмотрим простейший нелинейный осциллятор, описываемый уравнением Дюффинга, который подвергается внешнему гармоническому воздействию

$$\ddot{x} + \Omega_0^2 x - ax^3 = b \sin \omega t.$$

Данному уравнению соответствует гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}(v^2 + \Omega_0^2 x^2) - \frac{1}{4}ax^4 - bx \sin \omega t. \quad (3.1)$$

Переходя к переменным p, q с помощью производящей функции $F(p, x) = \int^x \sqrt{2p\Omega_0 - \Omega_0^2 x^2} dx$, приводим (3.1) к виду

$$H = \Omega_0 p - \frac{ap^2}{\Omega_0^2} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2q + \frac{1}{8} \cos 4q \right) - b \sqrt{\frac{p}{2\Omega_0}} [\cos(q - \omega t) + \cos(q + \omega t)]. \quad (3.2)$$

При малых значениях параметров a (слабая нелинейность) и b (слабое внешнее воздействие) слагаемые в (3.2), гармонически зависящие от фазы, вообще говоря, приводят лишь к малым осцилляциям координаты и импульса. Они могут быть устранены из гамильтониана последовательностью канонических преобразований. Проиллюстрируем процедуру устранения на гамильтониане вида

$$H = H_0 + \varepsilon H_1(p) \cos(q' - \omega t).$$

Сначала с помощью производящей функции $F_1 = p(q' - \omega t)$ введем новую фазу $q = q' - \omega t$:

$$H = H_0(p) - \omega p + \varepsilon H_1(p) \cos q, \quad (3.3)$$

а затем, используя производящую функцию

$$F_2 = p_1 q - \varepsilon \frac{H_1(p_1)}{\frac{dH_0(p_1)}{dp_1} - \omega} \sin q$$

— новый импульс p_1 , связанный с p соотношением

$$p = p_1 - \varepsilon \frac{H_1(p_1)}{\frac{dH_0(p_1)}{dp_1} - \omega} \cos q. \quad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в (3.3) и разлагая в ряд по малой величине ε , находим, что в гамильтониане выпадают слагаемые пропорциональные ε . Возникающие при этом члены, пропорциональные ε^2 , ε^3 , могут быть устранены аналогичным образом. Однако данная процедура становится незаконной для состояний, близких к резонансу, когда частота невозмущенных осцилляций $\Omega = dH_0/dp$ примерно равна частоте внешнего воздействия ω . В этом случае резонансный знаменатель в (3.4) стремится к нулю, и разложение в ряд по ε теряет смысл.

Учитывая эти соображения, опустим в (3.2) малые быстропеременные слагаемые, оставив лишь резонансное (мы считаем, что частоты Ω_0 и ω близки друг к другу):

$$H \approx (\Omega_0 - \omega)p - \frac{3}{8} \frac{ap^2}{\Omega_0^2} - b \sqrt{\frac{p}{2\Omega_0}} \cos q.$$

Поделив последнее выражение на $-(3/8)a/\Omega_0^2$, приводим его к каноническому виду второго фундаментального гамильтониана

$$H = -\alpha p + p^2 + \beta \sqrt{p} \cos q. \quad (3.5)$$

Исследуем картину фазовых траекторий, описываемых данным гамильтонианом. Точки равновесия расположены на фазовой плоскости при значениях $q_r = 0, \pi$ и p_r , определяемых уравнением

$$4x^3 - 2\alpha x \pm \beta = 0, \quad (3.6)$$

где $x = p_r^{1/2}$. Оно имеет одно решение при $\alpha < \alpha_c = (3/2)\beta^{2/3}$ и три при $\alpha > \alpha_c$. Если $\alpha < 0, |\alpha| \gg \alpha_c$, то фазовые траектории близки к окружностям с центром в точке $O_1(q_r = \pi, p_r \approx (\beta/2\alpha)^2)$ (рис. 3.1а). С ростом α окружности деформируются, поджимаясь справа, а неподвижная точка смещается влево (рис. 3.1б). Этот процесс продолжается до тех пор, пока при $\alpha = \alpha_c$ не происходит бифуркация — возникает вырожденная точка равновесия $p_r = \beta^{2/3}/4, q_r = 0$. В этой точке $\partial H/\partial p = \partial^2 H/\partial^2 p = 0$, поэтому в ее окрестности гамильтониан (3.5) принимает вид

$$H \approx \frac{2}{\beta^{2/3}}(p - p_r)^3 - \frac{\beta^{4/3}}{2}q^2 + \text{const.}$$

Фазовые траектории для случая $\alpha = \alpha_c$ изображены на рис. 3.1в.

При $\alpha > \alpha_c$ вырожденная точка равновесия разделяется на две обычные: устойчивую O_2 (эллиптическую) и неустойчивую O_3 (гиперболическую) (рис. 3.1г). Траектории, проходящие через точку O_3 (сепаратрисные), разделяют фазовую плоскость на области S_1, S_2, S_3 . В них располагаются траектории, окружающие точки: $O_1 - (S_1), O_2 - (S_2)$ и все три неподвижные точки — S_3 . Дальнейший рост параметра α приводит к увеличению областей S_1 и S_2 , при этом точка O_2 приближается к началу координат (рис. 3.1д). При $\alpha \gg \alpha_c$ имеем $p_{r2} \approx (\beta/2\alpha)^2, p_{r1} \approx p_{r3} \approx \alpha/2$. В областях $S_{2,3}$, как и в случае больших отрицательных значений α , траектории опять оказываются близкими к окружностям. В области S_1 можно приближенно положить $p \approx \alpha/2$. Учитывая выражение для параметра $\alpha = (\Omega_0 - \omega) \cdot 8\Omega_0^2/3a$, находим, что условие $p = \alpha/2$ является условием резонанса нелинейных осцилляций рассматриваемой системы (частота собственных осцилляций $\Omega = \Omega_0 + (3a/4\Omega_0^2)p$) и внешнего воздействия. При резонансных значениях $p \approx \alpha/2$ гамильтониан (3.5) принимает вид гамильтониана нелинейного маятника:

$$H \approx \text{const} + \left(p - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{1/2} \cos q.$$

Характерным признаком резонанса является наличие «захваченных в резонанс» фазовых траекторий, на которых фаза осциллирует в ограниченных пределах $\langle \dot{q} \rangle_t = 0$. Поскольку фаза q отсчитывается от фазы внешнего воздействия $q = q' - \omega t$, то на захваченных траекториях имеем $q' = \omega t$, т.е. фаза системы «привязана» к фазе внешнего воздействия.

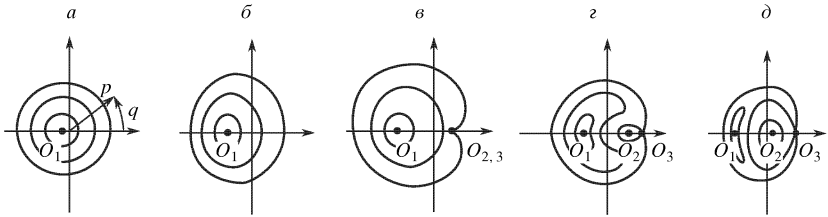


Рис. 3.1. Изменение картины фазовых траекторий при возрастании параметра α : $a - \alpha < 0$, $|\alpha| \gg \alpha_c$, $б - 0 < \alpha < \alpha_c$, $в - \alpha = \alpha_c = \frac{3}{2}\beta^{2/3}$, $г - \alpha > \alpha_c$, $д - \alpha \gg \alpha_c$.

Проведенное рассмотрение показывает, что захваченные траектории, а вместе с ними и само явление резонанса, существуют лишь при достаточно больших положительных значениях параметра $\alpha = (\Omega_0 - \omega) \cdot 8\Omega_0^2/3a$. Действительно, частота рассматриваемого нелинейного осциллятора падает с ростом амплитуды осцилляций $\Omega = \Omega_0 - 3ap/4\Omega_0^2$, и поэтому резонансное условие $\Omega = \omega$ может быть выполнено лишь при $\Omega_0 > \omega$ ($\alpha > 0$).

Уменьшение параметра α приводит к последовательности трансформаций фазовой плоскости, обратной показанной на рис. 3.1.

Таким же по результатам оказывается рост параметра β . В частности, при $\beta = \beta_c = (2\alpha/3)^{3/2}$ происходит обратная бифуркация, и для значений $\beta > \beta_c$ область захваченных траекторий S_1 (резонансная) пропадает.

Таким образом, для рассматриваемой модели явление резонанса существует лишь при не слишком большой амплитуде внешнего воздействия ($\beta \propto b$).

3.2. ЭЦР-взаимодействие слабoreлятивистских электронов. Одна из практически интересных задач, которая описывается вторым фундаментальным гамильтонианом, это задача об ЭЦР-взаимодействии в приближении слабого релятивизма (см. [48,49], а также обзорную работу [50]). В этом приближении гамильтониан электрона, движущегося в постоянном магнитном поле в присутствии переменного электромагнитного поля, имеет следующий вид:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2} + \frac{e}{mc} \mathbf{p} \mathbf{A} \quad (3.7)$$

Здесь $\mathbf{p} = \mathbf{P} + (e/c)\mathbf{A}_0$, $\mathbf{P} = (P_x, P_y, 0)$ — обобщенный импульс, $\mathbf{A}_0 = (-yB_0, 0, 0)$ — вектор-потенциал основного магнитного по-

ля. Вектор-потенциал $\mathbf{A}_1 = A_1(\cos \omega t, \sin \omega t, 0)$ описывает однородное, циркулярно поляризованное электромагнитное поле, вращающееся в электронную сторону.

Переменные действие — фаза ларморовского вращения (μ, θ) можно ввести с помощью производящей функции, зависящей от старых (x, y) и новых (θ, Y) координат [51]:

$$F = m_e \omega_e \left[\frac{1}{2} (y - Y)^2 \operatorname{ctg} \theta + xY \right].$$

Старые и новые импульсы выражаются через координаты посредством соотношений

$$P_x = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad P_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad p_Y = -\frac{\partial F}{\partial Y}, \quad p_\theta = \mu = -\frac{\partial F}{\partial \theta}.$$

Откуда следует что величины $-\frac{1}{m_e \omega_e} p_Y$ и Y совпадают с x и y — координатами ларморовского центра соответственно. Для компонент импульса p_x, p_y получаем

$$p_x = -\sqrt{2\mu m_e \omega_e} \sin \theta, \quad p_y = \sqrt{2\mu m_e \omega_e} \cos \theta.$$

Переходя к новым переменным и дополнительно сдвигая фазу на $\omega t (\theta \rightarrow \theta - \omega t)$, приводим гамильтониан (3.7) к виду второго фундаментального гамильтониана:

$$H = (\omega_{e0} - \omega) \mu - \frac{\omega_{e0}^2}{2mc^2} \mu^2 - \sqrt{2\mu m_e \omega_{e0}^3} \frac{A_1}{B_0} \cos \theta. \quad (3.8)$$

Соответствующие значения величин α и β равны $\alpha = (\omega_{e0} - \omega) 2mc^2 / \omega_{e0}^2$, $\beta = \sqrt{8\mu m_e^3 / \omega_{e0}} (A_1 / B_0) c^2$.

3.3. Резонансное взаимодействие в неоднородных системах. Адиабатический инвариант. Автофазировка. При выводе гамильтониана (3.8) основное магнитное поле считалось однородным и постоянным, а переменное электромагнитное — однородным. В однородных системах величина μ меняется со временем периодически. В резонансном случае, когда частота внешнего воздействия близка к циклотронной, причиной осцилляций является релятивистская зависимость циклотронной частоты от энергии. Напомним, что именно этот фактор накладывает принципиальное ограничение на ускорение заряженных частиц в циклотронах. В том случае когда основное магнитное поле или переменное электромагнитное неоднородны, и следовательно, могут меняться со временем на траектории электро-

на, динамика циклотронного резонансного взаимодействия более интересна. В частности, появляется возможность существенно большего увеличения энергии.

Наиболее адекватный математический аппарат, позволяющий проанализировать ЭЦР-взаимодействие с волнами конечной амплитуды в неоднородных системах, — аппарат адиабатических инвариантов. Его можно использовать, если параметры системы меняются за время, существенно превышающее период осцилляций.

В этом случае приближенным интегралом движения является адиабатический инвариант

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint \mu d\theta$$

для траекторий с финитным изменением фазы и

$$J = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mu d\theta$$

— с инфинитным изменением.

Постоянство адиабатического инварианта означает, что при медленном изменении параметров системы изображающая точка движется на фазовой плоскости по орбитам, которые охватывают постоянную площадь. Отсюда, в частности, следует, что изображающая точка, находящаяся в окрестности эллиптической точки равновесия, привязана к последней, перемещаясь вместе с ней по фазовой плоскости при эволюции системы. Данный результат теории адиабатических инвариантов в дальнейшем позволит прийти к содержательным заключениям в ряде интересных задач.

Рассмотрим электрон, движущийся в неоднородном магнитном поле, и предположим, что изображающая точка на фазовой плоскости располагается в окрестности эллиптической точки равновесия O_1 (рис. 3.1). Если электрон смещается в область большего магнитного поля, то точка O_1 сдвигается влево — величина μ_r , а вместе с ней и энергия электрона возрастают.

По существу при этом мы имеем дело с явлением автофазировки. В отличие от синхротрона, где магнитное поле возрастает со временем, в рассматриваемом случае магнитное поле постоянно, а его рост на траектории электрона вызывается перемещением последнего.

Приведенные соображения основывались на принципе адиабатической инвариантности, и поэтому явление автофазировки можно считать следствием данного принципа [48].

Включим теперь в рассмотрение эффект обратного влияния ЭЦР-взаимодействия на движение электрона вдоль неоднородного магнитного поля [48,52]. Для упрощения анализа предположим сначала, что выполняется условие $\alpha \gg \alpha_c$, т.е. параметры системы далеки от бифуркационных (см. ниже). В этом случае для электронов в области S_1 справедливо приближенное равенство $\mu \approx \mu_r = (mc^2/\omega_{e0}^2)(\omega_{e0}(s) - \omega)$, где s — расстояние вдоль магнитного поля. Из этого выражения следует, что используемое нами приближение слабого релятивизма пригодно при не слишком больших вариациях ω_{e0} , когда их можно учитывать лишь в сочетании $\omega_{e0} - \omega$.

Положим в (3.8) $\mu = \mu_r$, в силу условия $\alpha \gg \alpha_c$ опустим последнее слагаемое и для учета продольного движения введем гамильтониан дополнительный член $p_{\parallel}^2/2m_e$. При этом получаем гамильтониан, в котором канонически сопряженными переменными являются s и p_{\parallel} :

$$H = mc^2 \frac{[\omega_{e0}(s) - \omega]^2}{2\omega_{e0}^2} + \frac{p_{\parallel}^2}{2m_e}. \quad (3.9)$$

Данный гамильтониан полезно сравнить с гамильтонианом, описывающим движение электрона в отсутствие переменного электромагнитного поля, когда адиабатическим инвариантом является величина μ , а не J :

$$H = \mu\omega_{e0}(s) + \frac{p_{\parallel}^2}{2m_e}. \quad (3.10)$$

В обоих случаях на электрон действует диамагнитная сила $F = -\mu d\omega_{e0}/ds$, стремящаяся вытолкнуть его в область меньшего магнитного поля. Однако в присутствии переменных полей интервал достижимых магнитных полей оказывается меньшим, поскольку увеличение ω_{e0} на траектории ведет к росту $\mu \approx (mc^2/\omega_{e0}^2)[\omega_{e0}(s) - \omega]$. Для электронов, удерживаемых в магнитной ловушке, величина μ принимает максимальное значение в точке остановки, где $p_{\parallel} = 0$,

$$\mu_{\max} = \sqrt{\mu_{\min}^2 + \left(\frac{cp_{\parallel,\min}}{\omega_{e0,\min}} \right)^2}.$$

Здесь индекс \min отмечает значения величин в точке минимума магнитного поля.

После остановки электрон начинает обратное движение в область меньшего магнитного поля, сопровождающееся уменьшением μ . Таким образом, при наличии точки остановки увеличение энергии электронов в режиме автофазировки обратимо и не приводит к нагреву. Вместе с тем такой режим ЭЦР-взаимодействия можно использовать для улучшения удержания электронов в адиабатических ловушках — «затыкания пробок». Действительно, первые слагаемые в гамильтонианах (3.9), (3.10) имеют смысл потенциальной энергии, возрастающей при движении электрона в область большего магнитного поля. Их сопоставление показывает, что при выполнении приближенного условия $\frac{c}{v_{\perp 0}} \frac{\Delta\omega_{e0}}{\omega_{e0}} \geq 1$ ($\Delta\omega_{e0}$ — перепад значений в пределах ловушки) удержание в режиме автофазировки является более эффективным. Рассматриваемое явление особенно существенно для электронов с малыми значениями $v_{\perp 0}$, которые в отсутствие СВЧ электромагнитного поля попали бы в так называемый конус потерь.

С формально математической точки зрения эффект улучшения удержания в присутствии СВЧ-поля вызывается смещением на фазовой плоскости эллиптической неподвижной точки в сторону больших значений поперечной энергии при увеличении магнитного поля. В результате при движении электрона к пробкам возрастает выталкивающая сила. Положение точки O_1 требуемым образом зависит от магнитного поля не только в режиме релятивистской автофазировки ($\alpha \gg \alpha_c$), рассмотренном выше, но и при произвольных значениях α . Сравнительно просто может быть рассмотрен также случай больших отрицательных значений параметра $\alpha \propto \omega_e - \omega$ ($|\alpha| \gg \alpha_c$). В этом случае система далека от состояния релятивистского циклотронного резонанса, и поэтому в гамильтониане (3.8) может быть опущено второе слагаемое, пропорциональное μ^2 . Из условий $\partial H / \partial \mu = \partial H / \partial \theta = 0$ находим положение единственной неподвижной точки на фазовой плоскости

$$\mu = \frac{m_e \omega_{e0}^3}{2(\omega_{e0} - \omega)^2} \left(\frac{A_1}{B_0} \right)^2, \quad \theta = \pi.$$

Для фазовых траекторий в силу принципа постоянства адиабатического инварианта, привязанных к точке равновесия, по

аналогии с (3.9), (3.10) гамильтониан продольного движения может быть представлен в виде

$$H = \frac{m_e \omega_{e0}^3}{2[\omega - \omega_{e0}(s)]} \left(\frac{A_1}{B_0} \right)^2 + \frac{p_{\parallel}^2}{2m_e}. \quad (3.11)$$

Из этого выражения следует, что при приближении электрона к точке циклотронного резонанса со стороны меньшего магнитного поля выталкивающая сила неограниченно возрастает:

$$F = -\frac{\partial H}{\partial s} \approx -\frac{m_e \omega_{e0}^3}{2[\omega - \omega_{e0}(s)]^2} \left(\frac{A_1}{B_0} \right)^2 \frac{\partial \omega_{e0}}{\partial s}. \quad (3.12)$$

Ее ограничение в реальных условиях обусловлено нарушением условия адиабатичности, поскольку на достаточно малых расстояниях от точки циклотронного резонанса изменения фазовой плоскости при движении электрона не могут считаться адиабатически медленными.

Выражению (3.12) можно дать элементарную трактовку. В рассматриваемом случае в СВЧ-поле круговой поляризации для скорости электрона справедливо приближенное выражение

$$\mathbf{v} \approx \frac{eE}{m_e(\omega - \omega_{e0})} (\cos \Phi(t), \sin \Phi(t), 0),$$

где $E = (\omega/c)A_1$, $\Phi(t) = (\omega - \omega_{e0})t + \text{const}$. Усредненное по осцилляциям значение μ равно

$$\langle \mu \rangle \approx \frac{m_e \omega_{e0} \omega^2}{2(\omega - \omega_{e0})^2} \left(\frac{A_1}{B_0} \right)^2.$$

Учитывая также, что $\omega \approx \omega_{e0}$, находим, что диамагнитная сила $F = -\langle \mu \rangle \partial \omega_{e0} / \partial s$ сводится к (3.12).

Последний из рассмотренных эффектов не связан с релятивизмом, поэтому в условиях современного плазменного и термоядерного эксперимента он может влиять также, например, на динамику ионов в открытых ловушках. Именно в этом контексте он был довольно детально изучен в ряде работ (см., например, [11] и приведенные там ссылки). Другая область его возможного применения — разделение изотопов [53]. Действительно, знак эффективной потенциальной энергии $U = m_j \frac{\omega_{j0}^3}{2(\omega - \omega_{j0})} \left(\frac{A_1}{B_0} \right)^2$, где $j = e, i$, зависит от соотношения между циклотронной частотой и частотой СВЧ-поля. Поэтому если в плазме, ионная компонен-

та которой состоит из двух изотопов ($\omega_{i1} < \omega_{i2}$), возбудить неоднородное СВЧ-поле с частотой $\omega_{i1} < \omega < \omega_{i2}$, то в однородном магнитном поле ионы тяжелого изотопа будут притягиваться к области максимума СВЧ-поля, а ионы легкого — отталкиваться от нее.

3.4. Бифуркации фазовой плоскости. Скачки адиабатических инвариантов. Нагрев электронов. Принцип постоянства адиабатических инвариантов, согласно которому площадь, охватываемая фазовой траекторией, остается постоянной при достаточно медленных изменениях параметров системы, нуждается в уточнении.

Рассмотрим достаточно сложную динамическую систему, на фазовой плоскости которой имеется несколько неподвижных точек. В этом случае должны существовать особые траектории — сепаратрисы, разделяющие траектории, окружающие различные точки равновесия (см., например, выше). При изменении параметров системы площади отдельных областей внутри сепаратрис меняются. Предположим, что некоторая фазовая траектория, охватывающая площадь $2\pi J$, лежит в области S_i . Когда в результате изменения параметров системы площадь области S_i сравняется с $2\pi J$, рассматриваемая фазовая траектория становится сепаратрисой. При дальнейшем изменении параметров изображающая точка, движущаяся по этой траектории, переходит в другую область S_j , начиная обращаться вокруг другой точки равновесия. Такой переход сопровождается скачкообразным изменением адиабатического инварианта на ΔJ , которое по величине может сравниться и даже превышать начальное значение J . Данное изменение следует отличать от изменения, обусловленного неадиабатичностью движения в окрестности сепаратрисы. Из-за последнего фактора переход через сепаратрису сопровождается изменением адиабатического инварианта на малую величину $\Delta J \approx \varepsilon J$ или $\Delta J \approx \varepsilon \ln \varepsilon$, где ε — параметр адиабатичности (см. [54-56]), а также обзорную работу [45].

Следует отметить, что возможны ситуации, при которых на первый план выступают малые изменения второго типа. Это происходит, например, при периодических изменениях параметров системы, когда изображающая точка на фазовой плоскости переходит из одной области в другую и обратно. В этом случае скачки первого типа взаимно сокращаются, в то время как второго могут накапливаться. Ситуация еще более усложняется, если в процессе эволюции происходят бифуркации фазовой

плоскости — неподвижные точки возникают или пропадают. Интересующая нас система — слаборелятивистский электрон в постоянном магнитном и СВЧ-поле является именно такой (см. выше).

Рассмотрим характерные явления, связанные с бифуркациями фазовой плоскости, при ЭЦР-взаимодействии в неоднородном магнитном поле [48,52]. Предположим, что ансамбль электронов появился в результате ионизации нейтральных частиц в области сильного магнитного поля, где выполняется неравенство $\alpha \gg \alpha_c$. Начальная энергия электронов мала, и поэтому на фазовой плоскости они располагаются в окрестности начала координат (см. рис. 3.1*д*). К этой точке в силу условия $\alpha \gg \alpha_c$ близка эллиптическая точка равновесия O_2 . При движении электронов в область меньших магнитных полей изображающая точка на фазовой плоскости вместе с эллиптической точкой равновесия O_2 смещаются вправо, что ведет к увеличению μ , т.е. к нагреву.

Одновременно сокращаются области S_1 и S_2 , при этом фазовые траектории, близкие к сепаратрисе, переходят в область S_3 . В конце концов, при $\alpha = \alpha_c$ область S_2 исчезает, и все электроны из этой области оказываются на траекториях, окружающих точку O_1 . На этих траекториях значения μ по порядку величины равны $\alpha_c \approx \beta^{3/2}$, и значительно превышают начальные значения.

При возвращении электронов в область большего магнитного поля (возрастании параметра α на траектории) фазовая плоскость трансформируется в обратном порядке. Однако это не означает, что величина μ обязательно вернется к первоначальному малому значению. После обратной бифуркации и появления сепаратрисы в силу сохранения адиабатического инварианта изображающие точки ансамбля электронов оказываются в области S_3 . Возрастание α ведет к увеличению областей S_1 , S_2 за счет области S_3 :

$$\frac{\partial S_1}{\partial \alpha} = \pi - 2\varphi_0, \quad \frac{\partial S_2}{\partial \alpha} = \varphi_0, \quad \frac{\partial S_3}{\partial \alpha} = -\pi + \varphi_0,$$

где $\varphi_0 = \arccos \left| \frac{\sqrt{\alpha - 2x_c^2}}{2x_c} \right|$ — угол, под которым сепаратриса на рис. 3.1 пересекает горизонтальную ось (ось OX), x_c — координата гиперболической точки равновесия, определяемая уравнением (3.6) [52,57]. В зависимости от фазы, с которой траекто-

рии выходят на сепаратрису из области S_3 , они могут попасть в область S_1 или S_2 . В предположении равномерного распределения по фазе отношение вероятностей попадания в эти области очевидно равно $\frac{W_1}{W_2} = \frac{\dot{S}_1}{\dot{S}_2} = \frac{\partial S_1/\partial \alpha}{\partial S_2/\partial \alpha} \gg 1$. Поскольку переход через сепаратрису осуществляется при $\alpha \approx \alpha_c$, когда $\varphi_0 \ll 1$, основная часть фазовых траекторий оказывается в области S_1 . На этих траекториях величина μ имеет порядок $\alpha_c \approx \beta^{3/2}$. Таким образом, для рассматриваемого ансамбля электронов результатом двух бифуркаций является существенное возрастание μ .

Проанализируем теперь динамику электрона при изменении на его траектории амплитуды переменного поля ($\beta \propto A_1$) [49,50,58]. Эффекты, вызываемые изменением амплитуды, играют существенную роль, например, в том случае, когда электромагнитные волны вводятся в плазму в виде ограниченного пучка, пересекающего силовые линии магнитного поля, вдоль которых движутся заряженные частицы. Вдали от центра волнового пучка ($\beta \rightarrow 0$) фазовая плоскость принимает вид рис. 3.1d. с чрезвычайно узкой резонансной областью S_1 . В этой области энергия электронов низка и на фазовой плоскости изображающие точки группируются в окрестности начала координат, к которому близка эллиптическая точка равновесия O_2 . Возрастание параметра β ведет к увеличению области S_1 за счет областей S_2 и S_3 ($\partial S_3/\partial \beta = (1/2)\partial S_1/\partial \beta = -\partial S_2/\partial \beta = \sin \varphi_0/\sqrt{\alpha - 2x_c^2}$) (см. [52,57]). При $\beta_c = (2\alpha/3)^{2/3}$ происходит обратная бифуркация. В интервале времени, предшествующем моменту бифуркации ($\beta \approx \beta_c$), изображающие точки из области S_2 переходят в область S_1 на траекторию со средним значением $\mu \approx \beta_c^{2/3}$. Дальнейший рост параметра β не приводит к существенным изменениям μ , которое по порядку величины остается равным $\beta_c^{2/3}$. Когда данный параметр начинает уменьшаться, изображающие точки из области S_1 с равной вероятностью попадают в области S_2 и S_3 ($\frac{W_2}{W_3} = \frac{\partial S_2/\partial \beta}{\partial S_3/\partial \beta} = \frac{1}{2}$).

В силу сохранения адиабатического инварианта выход изображающих точек рассматриваемого ансамбля из области S_1 происходит при значениях β , близких к β_c . Поэтому изображающие точки, попавшие в S_2 , оказываются в малой окрестности точки O_2 . В дальнейшем при $\beta \rightarrow 0$ данная точка стремится к началу координат, увлекая за собой изображающие точки, расположенные на близлежащих траекториях. У этой части (поло-

вины) электронов величина μ возвращается к первоначальному малому значению.

Другая половина электронов выходит в область S_3 . Они движутся по орбитам, окружающим все три точки равновесия. На этих орбитах среднее значение $\mu \approx \alpha$ и по порядку величины остается неизменным при $\beta \rightarrow 0$. Проведенное обсуждение показывает, что двукратное пересечение сепаратрисы, вызываемое немонотонным изменением параметра β , как и в случае немонотонного изменения параметра α , может приводить к нагреву электронов.

Выше отмечалось, что наряду с задачей об ЭЦР-взаимодействии слаборелятивистских электронов многие другие задачи физики плазмы также описываются вторым фундаментальным гамильтонианом. Особенно близка к рассматривавшейся выше задача о циклотронном резонансном взаимодействии нерелятивистских заряженных частиц с электромагнитной волной, распространяющейся вдоль магнитного поля. В этом случае вектор-потенциал переменного поля, как и выше, дается выражением $\mathbf{A}_1 = A_1(\cos \Phi, \sin \Phi, 0)$, однако его фаза зависит не только от времени, но и от продольной координаты $\Phi(t, z) = -\omega t + kz$. Вводя так же, как и в п. 3.2, переменные μ, θ , приводим гамильтониан нерелятивистской частицы (принимая во внимание дальнейшее рассматриваем ионы) к виду

$$H = \mu(\omega_i - \omega) + \frac{p_{\parallel}^2}{2m_i} - \frac{A_1}{B_0} \sqrt{2\mu m_i \omega_i^3} \cos(kz - \theta).$$

Вводя с помощью производящей функции $F = \mu(\theta + kz) + Pz$, новые переменные: $P = p_{\parallel} - k\mu$ и фазу $\theta' = \theta + kz$, получаем

$$H = \frac{k^2 \mu^2}{2m_i} + \mu \left(\omega_i - \omega + \frac{kP}{m_i} \right) + \frac{P^2}{2m_i} - \frac{A_1}{B_0} \sqrt{2\mu m_i \omega_i^3} \cos(\theta'). \quad (3.13)$$

Здесь импульс P является циклическим, а сам гамильтониан в переменных μ, θ' имеет вид второго фундаментального гамильтониана.

Эффекты, обусловленные продольной структурой электромагнитного поля, необходимо учитывать, например, при анализе ИЦР-нагрева ионов в системах для разделения изотопов. В таких системах электромагнитные поля, как правило, возбуждаются винтовыми обмотками и представляют собой совокупность гармоник с $k \neq 0$. Гамильтониан (3.13) можно использовать для

приближенного анализа ИЦР-взаимодействия, если преобладающей является одна из гармоник.

Выше мы видели, что вариации параметров α, β могут приводить к бифуркациям фазовой плоскости, следствием чего является необратимый набор энергии заряженными частицами, т.е. их нагрев. Если многоизотопная плазма протекает сквозь неоднородное электромагнитное поле, то подобрав его частоту и максимальную амплитуду, входящие в параметры α, β , можно добиться того, что будут нагреваться ионы только одного изотопа. Нагретые ионы затем могут быть выделены из плазмы. Данный механизм селективного ИЦР-нагрева ионов обсуждается в [59].

4. Резонансное взаимодействие в слабом магнитном поле

4.1. О связи черенковского резонансного взаимодействия с циклотронным.

На первый взгляд циклотронное резонансное взаимодействие так же резко отличается от черенковского, как вращение по окружности от прямолинейного движения.

Однако если резонансное взаимодействие ограничено достаточно малыми интервалами времени, за которые кривизна окружности не успевает существенно проявиться, то различие между черенковским и циклотронным резонансным взаимодействием должно стираться. В этом случае, как мы увидим ниже, циклотронное резонансное взаимодействие принимает вид черенковского, а кривизна траектории становится фактором, ограничивающим длительность взаимодействия.

Выявим интересующие нас аспекты явления на примере достаточно простой задачи о взаимодействии электронов с плоской волной электрического потенциала, распространяющейся поперек постоянного магнитного поля $\varphi_1(x, t) = \varphi_1 \exp(-i\omega t + ikx)$ [60–62]. Волну будем считать высокочастотной ($\omega \gg \omega_e$) и коротковолновой ($k\rho_e \gg 1$), так чтобы траектория электрона слабо отличалась от прямолинейной за один период колебаний на расстояниях порядка длины волны.

Изменение энергии электрона под действием электрического поля рассматриваемых колебаний дается соотношением

$$\dot{\epsilon} = e(\mathbf{v}\nabla)\varphi_1 = e\left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)\varphi_1.$$

Для приращения энергии за один циклотронный период получаем

$$\Delta\varepsilon \approx iew \int_0^{2\pi/\omega_e} \varphi_1(t, x(t)) dt. \quad (4.1)$$

Здесь опущен вклад слагаемого, пропорционального $d\varphi_1/dt$, поскольку, как мы увидим ниже, приращение энергии $\Delta\varepsilon$ за циклотронный период намного превышает $e\varphi_1$.

При $\omega \gg \omega_e$, $k\rho_e \gg 1$ интеграл в (4.1) вычисляется методом стационарной фазы. Для плоской волны ($\Phi(t) = -\omega t + kx(t)$) точки стационарной фазы t_s являются

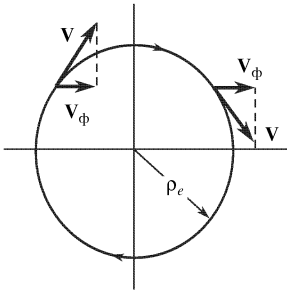


Рис. 4.1. Геометрия черенковского резонансного взаимодействия в слабом поперечном магнитном поле

точками черенковского резонанса. Резонанс возможен, если $v_{\perp} > \omega/k$. Он наступает, когда x -компонента скорости, меняющаяся из-за вращения электрона в магнитном поле, совпадает с фазовой скоростью колебаний. Электрон попадает в состояние резонанса дважды за каждый период ларморовского вращения (рис. 4.1). Длительность резонансного взаимодействия $\Delta_s t$ примерно равна времени, за которое фаза волны на траектории электрона меняется на величину порядка единицы. Поскольку в момент резонанса $\dot{\Phi} = 0$, для $\Delta_s t$ получаем $\Delta_s t \approx |\ddot{\Phi}_s|^{-1/2}$. Приращение энергии за один акт резонансного взаимодействия можно оценить как $\Delta\varepsilon \approx i\omega e\varphi_1 \Delta_s t$. Вычисление (4.1) методом стационарной фазы дает

$$\Delta\varepsilon = i\sqrt{2\pi}ew\varphi_1 \sum_{\alpha=1,2} \frac{1}{|\ddot{\Phi}_{s\alpha}|^{1/2}} \exp\left(i\Phi_{s\alpha} + i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \ddot{\Phi}_{s\alpha}\right), \quad (4.2)$$

где $\Phi_{s\alpha}$ — значение фазы колебаний в точках черенковского резонанса.

Используя соотношение $\ddot{\Phi}_{s,1,2} = k\ddot{x}_{1,2} = \pm k\omega_e [v_{\perp}^2 - (\omega/k)^2]^{1/2}$, приводим (4.2) к виду

$$\Delta\varepsilon = 2^{3/2}\pi^{1/2}e\varphi_1 \left(\frac{\omega}{\omega_e}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt[4]{(kv_{\perp}/\omega)^2 - 1}} \cos\left(\frac{\Phi_{s1} - \Phi_{s2}}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \times \\ \times \cos\left[\frac{1}{2}(\Phi_{s1} - \Phi_{s2}) + \frac{\pi}{4}\right] \exp\left[\frac{i}{2}(\Phi_{s1} + \Phi_{s2})\right], \quad (4.3)$$

где для разности фаз можно найти следующее выражение:

$$\Phi_{s1} - \Phi_{s2} = \frac{2\omega}{\omega_e} \left[\arccos \left(\frac{\omega}{kv_{\perp}} \right) - \sqrt{\left(\frac{kv_{\perp}}{\omega} \right)^2 - 1} \right].$$

Фазовый множитель $\exp [i/2 (\Phi_{s1} + \Phi_{s2})]$ несуществен.

Отметим осцилляторный характер зависимости величины $\Delta\varepsilon$ от ω, kv_{\perp} . Он обусловлен интерференцией двух актов черенковского резонансного взаимодействия, происходящих при различных значениях фазы Φ на траектории электрона.

Теперь рассмотрим тот же самый процесс в терминах ЭЦР-взаимодействия. При таком описании взаимодействие электронов с колебаниями предполагается «размазанным» по всему периоду циклотронного вращения. Поэтому для сопоставления двух подходов следует сравнивать усредненные по времени приращения энергии

$$\langle \dot{\varepsilon} \rangle = \frac{\omega_e}{2\pi} \Delta\varepsilon. \quad (4.4)$$

Воспользуемся выражением для скорости изменения энергии электрона в состоянии резонанса ($\omega = n\omega_e$). В плоской волне электрического потенциала, распространяющейся по OX , имеем $E_{\pm} = -ik\varphi_1/\sqrt{2}$. Подставляя это выражение в (4.4) и используя соотношение

$$J_{n-1}(\xi) + J_{n+1}(\xi) = (2n/\xi)J_n(\xi),$$

получаем

$$\langle \dot{\varepsilon} \rangle = -ie\omega J_n(k\rho_e)\varphi_1. \quad (4.5)$$

Выше предполагались выполненными условия $\omega \gg \omega_e, v_{\perp} > \omega/k$. В этом случае для функции Бесселя в (4.5) справедлива асимптотика [21]:

$$J_n(\xi) \approx \left(\frac{2}{\pi n} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt[4]{\xi^2 - 1}} \cos \left\{ n \left[\arccos \frac{n}{\xi} - \sqrt{\left(\frac{\xi}{n} \right)^2 - 1} + \frac{\pi}{4} \right] \right\}.$$

Подставляя данное выражение в (4.5) и учитывая соотношение $n = \omega/\omega_e$, находим, что (4.5) совпадает с (4.4), где $\Delta\varepsilon$ определяется (4.3).

Таким образом, оба способа анализа резонансного взаимодействия высокочастотных коротковолновых колебаний с электронами дают одинаковый результат. В то же время «черенковский» подход, при котором взаимодействие предполагается локализованным на малых участках ларморовской окружности, как нам кажется, более адекватен физике явления. Именно поэтому он оказывается и более простым с математической точки зрения.

Следует отметить, что (4.3) получено при единственном предположении: $\omega/\omega_e \gg 1$. Если условие циклотронного резонанса $\omega/\omega_e = n$ не выполняется, то последовательные приращения $\Delta\varepsilon$ различаются множителем $\exp(-2i\pi\omega/\omega_e)$, и среднее приращение за большое число периодов будет равно нулю.

Проанализируем в терминах черенковского подхода особенности резонансного взаимодействия при $v_\perp \rightarrow \omega/k$. Выше отмечалось, что при $v_\perp > \omega/k$ на каждом ларморовском периоде электрон дважды вступает в состояние черенковского резонанса. Длительность резонансного взаимодействия примерно равна $|2\pi/\ddot{\Phi}_s|^{1/2}$, где $\ddot{\Phi}_s = k\omega_e[v_\perp^2 - (\omega/k)^2]^{1/2}$. Она возрастает при $v_\perp \rightarrow \omega/k$. С другой стороны, интервал времени, разделяющий два акта резонансного взаимодействия $\Delta t \approx (2^{3/2}/\omega_e)(kv_\perp/\omega - 1)^{1/2}$, уменьшается при $v_\perp \rightarrow \omega/k$. Когда разность $v_\perp - \omega/k$ становится достаточно малой $v_\perp - \omega/k \leq \omega^{1/3}\omega_e^{2/3}/k$, оба акта сливаются в один. В предельном случае ($v_\perp = \omega/k$) одновременно выполняются условия $\dot{\Phi}_s = \ddot{\Phi}_s = 0$. Такой резонанс называют резонансом второго порядка. Его длительность примерно равна $\Delta_s t \approx |\ddot{\ddot{\Phi}}_s|^{-1/3}$, где $\ddot{\ddot{\Phi}}_s = \omega\omega_e^2$. Вычисляя, как и выше (4.1) методом стационарной фазы, получаем

$$\Delta\varepsilon = i\omega e\varphi_1 \frac{2^{1/3}\Gamma(1/3)}{3^{1/6}|\ddot{\ddot{\Phi}}_s|^{1/3}}.$$

Резонанс второго порядка, разумеется, может быть описан и в терминах циклотронного резонансного взаимодействия. С этой целью воспользуемся асимптотикой функции Бесселя, справедливой при $n \approx \xi \gg 1$ ($n = \omega/\omega_e, \xi = k\rho_e$) [21]:

$$J_n(\xi) \approx (2n)^{1/3} Ai \left[\frac{n - \xi}{(n/2)^{1/3}} \right].$$

Подставляя данное выражение в (4.5) и учитывая соотношение $Ai(0) = \frac{\Gamma(1/3)}{3^{1/6}2\pi}$, находим, что оба метода приводят к одному и тому же значению $\langle \dot{\epsilon} \rangle$.

Существенно, что величина $\langle \dot{\epsilon} \rangle$ не обращается в нуль даже при $\omega > kv_{\perp}$, когда условие черенковского резонанса не может быть выполнено. В этом случае обмен энергией между электроном и волной обязан так называемому эффекту конечности времени резонансного взаимодействия. Дело в том, что за время резонансного взаимодействия $\Delta_s t$ электрон не может «различить» колебания, частоты которых отличаются на $\Delta\omega \leq (\Delta_s t)^{-1}$. Поскольку резонанс второго порядка длится в течение $\Delta_s t \approx \omega^{-1/3}\omega_e^{-2/3}$, то колебания с $\omega/k > v_{\perp}$, для которых однако выполняется условие $\omega/k - v_{\perp} \leq \omega^{1/3}\omega_e^{2/3}/k$, будут взаимодействовать с электроном так же, как колебания с $\omega/k = v_{\perp}$. Если разность $\omega/k - v_{\perp}$ превышает указанную величину, то интенсивность резонансного взаимодействия резко падает. Используя асимптотику функции Эйри для больших положительных значений аргумента, находим

$$\langle \dot{\epsilon} \rangle \approx -\frac{i}{2^{3/4}\pi^{1/2}} \frac{\omega^{17/12}}{\omega_e^{1/6}(\omega - kv_{\perp})^{1/4}} \exp\left[-\frac{2^{3/2}}{3} \frac{(\omega - kv_{\perp})^{3/2}}{\omega^{1/2}\omega_e}\right] e\varphi_1.$$

Результаты проведенного анализа суммируются на рис. 4.2, позволяющим составить представление о характере зависимости $\langle \dot{\epsilon} \rangle$ при произвольном соотношении между ω/k и v_{\perp} .

В заключение отметим, что эффект конечности резонансного взаимодействия проявляется также и в ряде других задач. Так его необходимо принимать во внимание при анализе циклотронного резонансного взаимодействия в системах по разделению изотопов методом селективного ИЦР-нагрева [63]. В этих системах ионы пролетают через зону нагрева за некоторое конечное время τ . Соответственно, линия циклотронного резонанса уширяется на $\Delta\omega \approx \tau^{-1}$. Нагрев будет действительно селективным, если данный механизм уширения (наряду с эффектом Доплера и столкновениями) не приведет к перекрытию линий циклотронного резонанса соседних изотопов.

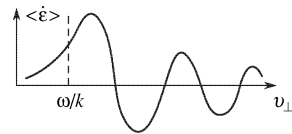


Рис. 4.2. Интенсивность резонансного взаимодействия в функции от v_{\perp}

В системах с неоднородным магнитным полем время резонансного взаимодействия определяется пролетом заряженных частиц через зону циклотронного резонанса (см. §7). Если в пределах плазмы магнитное поле имеет экстремум — максимум (минимум) и меняется в пространстве достаточно резко, то уширение резонансной полосы частот в область $\omega > \omega_{e,\max}$ ($\omega < \omega_{e,\min}$) определяется именно эффектом конечности времени резонансного взаимодействия. Поскольку время прохождения частиц через резонансную зону, а вместе с ним и величина $\Delta\omega$, зависят от скорости частиц, то, определив закон уширения, можно найти температуру плазмы [64].

4.2. Синхротронное излучение как черенковское.

Выше мы нашли, что взаимодействие высокочастотных коротковолновых колебаний с заряженными частицами, помещенными в магнитное поле, описывается проще на языке черенковского резонансного взаимодействия, чем на языке циклотронного. Продемонстрируем справедливость этого утверждения на примере синхротронного излучения [11,62]. Синхротронным принято называть магнитотормозное излучение ультрарелятивистских частиц. Максимум интенсивности синхротронного излучения приходится на частоты, значительно превышающие циклотронную, и длины волн, существенно меньшие ларморовского радиуса. Будем рассматривать синхротронное излучение как черенковское. Такой подход на первый взгляд противоречит известному положению, согласно которому черенковское излучение в вакууме невозможно. Однако если скорость заряженных частиц достаточно близка к скорости света, то при резонансе второго порядка ($\omega \approx kv_{\perp}$) из-за конечности времени резонансного взаимодействия различие скоростей не успевает проявиться, если выполняется условие $1 - v/c \leq (\omega_e/\omega)^{2/3}$. В ультрарелятивистском пределе ($v \approx c$) данное условие принимает вид $(mc^2/\varepsilon)^2 \leq \omega_{e0}/\omega$.

Проанализируем процесс излучения электромагнитных колебаний с некоторым фиксированным направлением волнового вектора \mathbf{k} . Согласно высказанной выше точке зрения резонансное взаимодействие с такими колебаниями, приводящее к их излучению, происходит в течение некоторого интервала времени $\Delta_s t$, когда вектор скорости ультрарелятивистского электрона близок по направлению к волновому вектору колебаний. Поскольку данный интервал мал по сравнению с ларморовским периодом, будем рассматривать излучение как результат «столк-

новения» с магнитным полем и характеризовать его соотношениями (см., например, [65]):

$$d\varepsilon_{\mathbf{k},\omega} = c |[\mathbf{k}\mathbf{A}_\omega]|^2 R_0^2 d\Omega d\omega, \quad (4.6)$$

$$[\mathbf{k}\mathbf{A}_\omega] = \frac{e}{2\pi c R_0} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{k}\mathbf{v}(t)] \exp[i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)] dt, \quad (4.7)$$

где $d\varepsilon_{\mathbf{k},\omega}$ — полная энергия, излучаемая в телесный угол $d\Omega$ в частотном интервале $d\omega$, \mathbf{A}_ω — Фурье-компонента вектор-потенциала излучаемых колебаний, R_0 — расстояние до точки наблюдения.

Направим ось OZ декартовой системы координат вдоль основного магнитного поля и расположим ось OX в плоскости векторов \mathbf{k} и \mathbf{B}_0 .

В этой системе координат траектория электрона описывается выражением

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + \rho_e \sin \omega_e t; y_0 - \cos \omega_e t; z + v_{\parallel} t),$$

и для фазы подинтегрального множителя в (4.6) получаем

$$\psi(t) = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}(t) = \text{const} + \omega t - k_{\perp} \rho_e \sin(\omega_e t) - k_{\parallel} v_{\parallel} t.$$

На малых интервалах времени $\Delta t \ll \omega_e^{-1}$ для фазы $\psi(t)$ и вектора $[\mathbf{k}\mathbf{v}(t)]$ справедливы приближенные выражения

$$\begin{aligned} \psi(t) &\approx \text{const} + [\omega - kv \cos(\theta - \chi)] t + \frac{1}{6} \omega \omega_e^2 \sin \chi t^3, \\ [\mathbf{k}\mathbf{v}(t)] &\approx (-\cos \theta \sin \chi \omega_e t; \sin(\chi - \theta); -\sin \theta \sin \chi \omega_e t), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $\chi = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0$ — питч-угол электрона, $\theta = \mathbf{k} \wedge \mathbf{B}_0$. Таким образом для расчета излучаемой мощности требуется вычислить интегралы

$$J^{(l)} = \int_{-\infty}^{\infty} t^l e^{i(at+bt^3)} dt, \quad (4.9)$$

где $l = 0, 1, a = \omega - kv \cos(\theta - \chi), b = \frac{1}{6} \omega \omega_e^2 \sin \chi$.

Черенковский резонанс возможен лишь для ультрарелятивистских электронов ($\varepsilon \gg mc^2$) при условии, что направления

векторов \mathbf{k} и \mathbf{v} близки друг к другу. Данное требование может быть удовлетворено лишь, если $\theta \approx \chi$. С учетом этих условий величина a может быть представлена в виде

$$a \approx \frac{1}{2}\omega \left[\left(\frac{mc^2}{\varepsilon} \right)^2 + (\theta - \chi)^2 \right].$$

Интегралы (4.9) выражаются через функцию Эйри и ее производную:

$$J^{(0)} = \frac{2\pi}{(3b)^{1/3}} Ai(g),$$

$$J^{(1)} = -i \frac{2\pi}{(3b)^{2/3}} Ai'(g),$$

где $g = a/(3b)^{1/3}$.

Подставим полученные выражения в (4.6), (4.7) и введем среднюю по времени интенсивность излучения

$$dI_{\mathbf{k},\omega} = \frac{\omega_e}{2\pi} d\varepsilon_{\mathbf{k},\omega} = \frac{1}{2^{1/3}\pi \sin^{2/3}\chi} \frac{e^2 \omega^{4/3}}{c \omega_e^{1/3}} \left[(\chi - \theta)^2 Ai^2(g) + \left(\frac{2\omega_e}{\sin \chi \omega} \right)^{2/3} Ai'^2(g) \right] d\Omega d\omega. \quad (4.10)$$

Проанализируем свойства последнего выражения и постараемся дать их наглядную интерпретацию в терминах черенковского резонансного взаимодействия. Поскольку функция Эйри экспоненциально спадает при $g \gg 1$ максимум излучаемого спектра приходится на частоту $\omega_{\max} \approx \omega_{e0} (\varepsilon/mc^2)^2$, когда аргумент функции Эйри по порядку величины равен единице ($g \approx 1$).

То же самое условие $g \approx 1$ позволяет оценить и угол раствора излучения $\Delta\theta \approx \max |\theta - \chi| \approx mc^2/\varepsilon$.

Данные оценки легко получить из выражения для фазы (4.8) в окрестности точки черенковского резонанса. Действительно, из этого выражения находим, что если бы условие черенковского резонанса выполнялось точно ($\omega = kv \cos(\theta - \chi)$), то длительность резонансного взаимодействия можно было оценить как $\Delta t \approx \omega^{-1/3} \omega_{e0}^{-2/3} (\varepsilon/mc^2)^{2/3}$. За это время неточность в выполнении

нии условия черенковского резонанса не успеет проявиться, если удовлетворяются условия $\omega \leq \omega_{e0} (\varepsilon/mc^2)^2$, $|\theta - \chi| \leq mc^2/\varepsilon$. Азимутальный угол $\Delta\varphi$, на который поворачивается электрон за время Δt равен $\Delta\varphi \approx \Delta\theta \approx mc^2/\varepsilon$. Таким образом, ультрарелятивистский электрон излучает как узконаправленный вращающийся прожектор.

Из (4.10) находим, что проинтегрированная по углам интенсивность излучения по порядку величины равна

$$dI_\omega \approx \frac{e^2\omega}{c} \left(\frac{mc^2}{\varepsilon} \right)^2 d\omega. \quad (4.11)$$

В то же время для интенсивности черенковского излучения имеем

$$dI_\omega^{ch} = \frac{e^2\omega}{c} \sin^2 \theta_c d\omega. \quad (4.12)$$

Считая, что черенковский угол θ_{ch} по порядку величины равен $\Delta\theta$, приходим к выводу о приближенном соответствии (4.11) и (4.12).

В теории синхротронного излучения известен так называемый эффект депрессии [66]. Он состоит в подавлении излучения быстрых частиц, движущихся в достаточно плотной плазме $\omega_{pe} \geq \omega_{e0}(\varepsilon/mc^2)$ (ω_{pe} — электронная плазменная частота).

В характерной области частот $\omega \gg \omega_{e0}$ влияние холодной плазмы сводится к уменьшению показателя преломления $N^2 \approx 1 - (\omega_{pe}/\omega)^2$, и следовательно, к возрастанию фазовой скорости колебаний $\omega/k = c/N$. Учтем это обстоятельство в выражении для фазы (4.8). Будем считать, что плазма достаточно разрежена $\omega_{pe} \ll \omega$. В этом случае в приближенном выражении для величины a , входящей в аргумент функции Эйри, появится дополнительное слагаемое

$$a \rightarrow a' \approx \frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{mc^2}{\varepsilon} \right)^2 + (\theta - \chi)^2 + \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^2 \right].$$

При выполнении условия $\omega_{pe} \geq \omega_{e0}(\varepsilon/mc^2)$ именно оно станет основным, определяющим максимальное значение частоты излучаемых колебаний $\omega_{\max} \approx \omega_{pe}^{3/2} \omega_{e0}^{-1/2}$.

Эффект депрессии имеет простую трактовку с точки зрения черенковского резонансного взаимодействия. Действительно, увеличение фазовой скорости колебаний из-за влияния холодной плазмы $\left(\frac{\omega}{kc} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega}\right)^2\right)$ затрудняет «черенковское» взаимодействие. Несложные оценки с использованием (4.8) показывают, что при выполнении условия $\omega_{pe} > \omega_{e0}(\varepsilon/mc^2)$ именно этот фактор лимитирует продолжительность резонанса.

В заключение заметим, что с изложенной точки зрения можно рассматривать и некоторые другие виды излучения ультрарелятивистских частиц, например, излучение в ондуляторах.

4.3. Серфатронное ускорение. Выше были рассмотрены особенности резонансного черенковского взаимодействия в слабом магнитном поле в случае колебаний достаточно малой амплитуды, для анализа которых пригодно линейное приближение. При конечной амплитуде волны присутствие слабого магнитного поля, перпендикулярного направлению распространения колебаний, делает возможным неограниченное ускорение заряженных частиц [67,68].

Как известно, в отсутствие магнитного поля черенковское взаимодействие с волной конечной амплитуды ведет к захвату резонансных частиц в потенциальные ямы волны. (Как и в п. 4.1 рассматриваются простейшие потенциальные колебания $\varphi_1(\mathbf{r}, t) = \varphi_1 \cos(kx - \omega t)$.) Захваченные частицы движутся вместе с волной. При наличии внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ ввиду постоянства x -компоненты скорости захваченных частиц ($\langle v_x \rangle = \omega/k$) они ускоряются магнитным полем в y -направлении [69]:

$$\dot{p}_y \approx \frac{e\omega}{c} B_0.$$

Разумеется, заряженные частицы получают энергию от электрического поля волны, которое направлено по OX . Однако постоянное магнитное поле поворачивает вектор скорости. В результате его x -компонента остается фиксированной ($\langle v_x \rangle = \omega/k$), в то время как y -компонента непрерывно возрастает.

Для ускорения частица должна находиться на склоне волны потенциала, поэтому процесс ускорения напоминает серфинг — катание на волнах прибоя. Этой аналогии и обязано название метода ускорения [67].

Если электрическое поле достаточно велико $k\varphi_1 > B_0$, то на нерелятивистском этапе, когда $v_y \ll c$, обратным влиянием движения по OY на состояние захваченных частиц можно пренебречь.

Анализ релятивистского этапа будем проводить с помощью гамильтониана (см. [70])

$$H = \left[(mc^2)^2 + (cp_x)^2 + c^2 \left(p_y + \frac{e}{c} B_0 x \right)^2 \right]^{1/2} - e\varphi_1 \cos(kx - \omega t).$$

Используя производящую функцию $F = p_x(x - t\omega/k) + p_y y$, перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с волной, и введем безразмерные величины $\pi = p_x/mc$, $\xi = (x - t\omega/k)\omega_e\omega/c^2k$, $\tau = t\omega\omega_e/c k$,

$$h = \frac{H}{mc^2} = \gamma - \frac{\pi}{N} + \psi \cos(a\xi), \quad (4.13)$$

где обозначено $\gamma = \sqrt{1 + \pi^2 + (N\xi + \tau)^2}$, $N = kc/\omega$, $\psi = e\varphi_1/mc^2$, $a = N^2\omega/\omega_e$. Канонический импульс $p_y = \text{const}$ исключен сдвигом оси времени. При этом уравнения движения принимают вид

$$\dot{\xi} = \frac{\pi}{\gamma} - \frac{1}{N}, \quad \dot{\pi} = -\frac{\xi + \tau}{\gamma} + a\psi \sin a\xi. \quad (4.14)$$

Система (4.13) имеет простое решение, описывающее режим непрерывного ускорения электронов: $\gamma_0(\tau) = N\tau(N^2 - 1)^{-1/2}$ при фиксированном положении частицы относительно волны $\xi_0 = \frac{1}{a} \arcsin\left(\frac{1}{a\psi} \frac{N}{\sqrt{N^2 - 1}}\right)$. Одновременно с ростом энергии и y -компоненты импульса меняется его x -компонента $\pi_0(\tau) = \tau(N^2 - 1)^{-1/2}$. При этом изменения энергии и p_x -компоненты импульса оказываются такими, что поддерживается состояние резонанса с волной ($v_x = c\pi/\gamma = c/N$).

Серфатронное ускорение, как и ускорение в режиме автофазировки, можно связать с принципом постоянства адиабатического инварианта. Рассмотрение оказывается наиболее простым на ультрарелятивистском этапе ($\tau \gg 1$). При $\tau \gg 1$ гамильтониан (4.13) в окрестности точки (ξ_0, π_0) принимает вид

$$h \approx \frac{1}{2\tau} \frac{(N^2 - 1)^{3/2}}{N^3} \pi_1^2 + \frac{1}{2} a^2 \psi |\cos(a\xi_0)| \xi_1^2. \quad (4.15)$$

где $\pi_1 = \pi - \pi_0$, $\xi_1 = \xi - \xi_0$, $a\xi > \pi/2$.

Гамильтониан (4.15) описывает осцилляции с частотой

$$\Omega \approx \frac{1}{\tau^{1/2}} \frac{(N^2 - 1)^{3/4}}{N^{3/2}} a\psi^{1/2} |\cos(a\xi_0)|^{1/2}.$$

Нетрудно видеть, что для достаточно больших значений τ условие адиабатичности $\Omega'_\tau/\Omega^2 \ll 1$ будет выполняться. Поэтому движение на плоскости (ξ, π) в окрестности точки (ξ_0, π_0) можно характеризовать адиабатическим инвариантом $J = \frac{1}{2\pi} \oint d\xi \pi$. В силу постоянства адиабатического инварианта все частицы: расположенные на фазовой плоскости в окрестности точки (ξ_0, π_0) будут ускоряться в одном и том же темпе (сравн. с п. 3.3). Саму точку (ξ_0, π_0) можно рассматривать как предельный случай траектории с нулевым значением адиабатического инварианта.

5. Возникновение стохастичности при резонансном взаимодействии в слабом магнитном поле

5.1. Стандартное отображение. Возникновение стохастичности в динамических системах. В настоящее время установлено, что полностью детерминированные динамические системы могут вести себя стохастически (динамическая стохастичность).

Стохастичность возникает в том случае, когда фазовые траектории системы оказываются неустойчивыми. Неустойчивость усиливает действие неизбежных в реальных условиях случайных воздействий, делая поведение динамической системы непредсказуемым на достаточно больших промежутках времени. Подробное изложение вопроса можно найти, например, в [51,71]. Мы приведем лишь наиболее существенные результаты, которые понадобятся в дальнейшем.

Одной из простейших математических моделей, позволяющей проследить за возникновением стохастичности, является так называемое стандартное отображение. Оно генетически связано с механизмом ускорения Ферми (ускорение космических лучей магнитными полями, замороженными в облака движущейся плазмы). Стандартное отображение моделирует большое число физически интересных задач, в том числе подробно рассмотренную в §4 о взаимодействии высокочастотных коротковолновых колебаний с заряженными частицами во внешнем магнитном поле. Учитывая это обстоятельство, продемонстрируем механизм возникновения стохастичности на примере стандартного отображения.

Стандартное отображение — это отображение плоскости переменных I, θ , определяемое соотношениями

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1}, \quad I_{n+1} = I_n - K \sin \theta_n. \quad (5.1)$$

Численное моделирование показало, что при $K < 1$ фазовые траектории на плоскости I, θ регулярны. В предельном случае $K \ll 1$ на ней выделяются прямые $I = 2\pi p$. В их окрестности приращения величин I, θ за один шаг малы, и дискретное отображение может быть заменено непрерывным

$$\frac{d\theta}{dn} = I - 2\pi p, \quad \frac{dI}{dn} = -K \sin \theta, \quad (5.2)$$

где «время» n меняется непрерывно. Данной системе динамических уравнений соответствует гамильтониан нелинейного маятника

$$H = \frac{1}{2}I^2 - K \cos \theta. \quad (5.3)$$

Из (5.1)–(5.3) следует, что при $K \rightarrow 0$, в окрестности значений $I = 2\pi p$ фазовые траектории образуют картину, типичную для нелинейного резонанса (рис. 5.1). Вдали от резонанса ($|I - 2\pi p| \gg \sqrt{K}$) фазовые траектории слабо отличаются от прямых $I = \text{const}$. С ростом K движение усложняется. Стохастичность движения при достаточно больших значениях K ясна интуитивно. Действительно, рассмотрим ансамбль траекторий с малым начальным разбросом $\delta\theta$. При $K \gg 1$ отображение (5.1) почти во всем интервале изменения θ является растягивающим — интервал $\delta\theta$ при последовательных отображениях возрастает. После того как он по порядку величины сравнится с единицей, в ансамбле найдутся такие траектории, которые будут эволюционировать совершенно различно.

Иными словами отображение (5.1) является неустойчивым, и следовательно, поведение рассматриваемой динамической системы непредсказуемым — стохастическим. Численные расчеты показали, что переход от регулярного поведения к хаотическому происходит при $K \approx 1$.

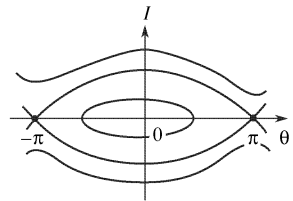


Рис. 5.1. Фазовые траектории динамической системы в окрестности нелинейного резонанса

Другой способ анализа отображения (5.1) основан на использовании гамильтониана, соответствующего данной системе

$$H = \frac{1}{2}I^2 - K \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n). \quad (5.4)$$

Используя тождество

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi nt),$$

приводим (5.4) к виду

$$H = \frac{1}{2}I^2 - K \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\theta - 2\pi nt). \quad (5.5)$$

Если $K \ll 1$, то в окрестности значений $I = 2\pi r$ в гамильтониане из всей суммы по n можно оставить только одно — резонансное слагаемое ($n = p$). При этом для величин $I' = I - 2\pi r$ и $\theta' = \theta - 2\pi pt$ гамильтониан (5.5) принимает вид (5.3). Данный гамильтониан приводит к стандартной картине фазовых траекторий, характерной для нелинейного резонанса (рис. 5.1). На траекториях «захваченных в резонанс» величина I осциллирует около резонансного значения $I = 2\pi r$. Максимальная амплитуда осцилляций достигается на сепаратрисе $\Delta_{\max} I \approx 2\sqrt{K}$. При $K > \pi^2/4$ соседние резонансы «перекрываются». В этой ситуации естественно ожидать беспорядочных переходов фазовой траектории от одного резонанса к другому, ведущих к стохастизации.

Условие перекрытия резонансов является более жестким по сравнению с полученным численным моделированием $K > 1$.

Расхождение снимается при учете резонансов более высокого порядка, проявляющихся в окрестности сепаратрисы. По мере приближения к сепаратрисе осцилляции становятся все более нелинейными, а их частота стремится к нулю. В результате, в окрестности сепаратрисы резонанса с произвольным номером n обязательно найдется фазовая траектория с частотой равной $\Omega = 2\pi/m$, где m — целое. Для этой траектории «соседние» слагаемые в (5.5) с $n' = n \pm 1$, не учитываемые в упрощенном гамильтониане (5.3) окажутся резонансными. Поэтому в окрестности данной траектории возникнет стандартная структура, характерная для нелинейного резонанса. Данная процедура мо-

жет быть повторена по отношению к этим вторичным резонансам и т.д.. Ее следствием является уширение области резонансов $I_n = 2\pi n$, что облегчает их перекрытие. Так, например, при учете только соседних гармоник (вторичных резонансов) критическое значение параметра K , соответствующее перекрытию, уже оказывается близким к единице [51].

5.2. Диффузионное уравнение. В стохастическом режиме движения значения фазы θ_n с различными номерами n в отображении (5.1) нескоррелированы. В приближении хаотических фаз приращение дисперсии в значениях I за один цикл движения дается выражением

$$\Delta(\text{Dis}_I) = \frac{1}{2}K^2.$$

Коэффициент диффузии по I связан с дисперсией соотношением

$$\text{Dis}_I = 2D_I\Delta n,$$

где Δn — число циклов. Из этого соотношения находим

$$D_I = \frac{1}{4}K^2. \quad (5.6)$$

В стохастическом режиме функция распределения по I эволюционирует в соответствии с уравнением диффузии

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D_I \frac{\partial^2 f}{\partial I^2}. \quad (5.7)$$

В диффузионном уравнении (5.7), как и во всем рассмотрении, проведенном выше, величина K считалась постоянной, не зависящей от I . Между тем, во многих физических задачах такая зависимость весьма существенна.

Выясним, каким должно быть диффузионное уравнение в общем случае.

При учете зависимости $K(I)$ динамические уравнения, соответствующие гамильтониану (5.4), принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= I - \frac{\partial K}{\partial I} \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n), \\ \dot{I} &= -K \sin \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Найдем приращение ΔI в одном акте взаимодействия динамической системы с внешней вынуждающей силой. Заменим δ -функцию ступенчатой

$$f(t-n) = \begin{cases} 1/\delta & (0 < t-n < \delta), \\ 0 & (t-n < 0, t-n > \delta). \end{cases} \quad (5.9)$$

Будем считать, что в течение единичного акта действия внешней силы параметр взаимодействия K меняется слабо (производные dK/dI , d^2K/dI^2 и т.д. достаточно малы). В этом случае в интервале времени $0 < t-n < \delta$ временную зависимость величин $\theta(t)$, $I(t)$ можно представить в виде рядов по $t' = t-n$:

$$\begin{aligned} I(t) &= I_n + \dot{I}t' + \frac{1}{2}\ddot{I}t'^2 + \dots, \\ \theta(t) &= \theta_n + \dot{\theta}t' + \frac{1}{2}\ddot{\theta}t'^2 + \dots. \end{aligned}$$

Для величин \dot{I} , $\dot{\theta}$, \ddot{I} из системы (5.8), модифицированной заменой (5.9) получаем следующие приближенные выражения:

$$\dot{I} = -K \sin \theta_n \frac{1}{\delta}, \quad \dot{\theta} = -\frac{dK}{dI} \cos \theta_n \frac{1}{\delta}, \quad \ddot{I} = \frac{1}{2} \frac{dK^2}{dI} \frac{1}{\delta^2}. \quad (5.10)$$

Поправки к (5.10) малы, если зависимость $K(I)$ является достаточно плавной.

Используя (5.10), находим приращение I за один акт взаимодействия:

$$\Delta I = -K \sin \theta_n + \frac{1}{4} \frac{dK^2}{dI}.$$

Последнее выражение показывает, что если $dK/dI \neq 0$, то взаимодействие с внешней силой наряду с возрастанием дисперсии в значениях I приводит также к систематическому изменению I :

$$\langle \dot{I} \rangle = \frac{1}{2} K \frac{dK}{dI}.$$

Здесь скобки означают усреднение по хаотически меняющейся фазе.

Для учета последнего эффекта в эволюционное уравнение наряду с диффузионным слагаемым необходимо ввести также так называемую силу динамического трения $F = \langle \dot{I} \rangle$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial I^2} Df - \frac{\partial}{\partial I} Ff.$$

Выше мы показали, что для рассматриваемого процесса выполняется соотношение

$$F = \frac{dD}{dI}, \quad (5.11)$$

поэтому эволюционное уравнение принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial I} D \frac{\partial f}{\partial I}. \quad (5.12)$$

Соотношение (5.11) характерно для гамильтоновых систем, пребывающих в состоянии динамического хаоса [11,51,72,73]. Действительно, если бы оно не выполнялось, то при $dD/dI \neq 0$ правая часть уравнения (5.12) была отлична от нуля даже если $f(I) = \text{const}$.

Между тем ансамбль стохастических гамильтоновых систем эволюционирует с сохранением фазового объема, и поэтому его эволюция должна заканчиваться установлением однородного распределения.

Как отмечалось выше, стандартное отображение моделирует большое число динамических систем. Как правило, они характеризуются нелинейной зависимостью $\Delta\theta = \theta_{n+1} - \theta_n = g(I)$. Если характерный масштаб изменения функции $g(I)$ велик по сравнению с K , то заменами $I \rightarrow g(I)$, $K \rightarrow Kdg/dI$ система динамических уравнений может быть сведена к стандартному отображению.

Если динамическая система подвержена внешним случайным воздействиям, то ее эволюция является необратимой и в отсутствие динамического хаоса. Состояние нелинейного резонанса характеризуется сравнительно большими осцилляциями динамических переменных. Это ведет к усилению необратимых эффектов.

Данное явление напоминает так называемую неоклассическую диффузию, характерную для термоядерных установок с достаточно сложным магнитным полем (см., например, [74]). В [72,75] (см. также [11] и Приложение 2) был рассчитан коэффициент диффузии по переменной действия для стандартного отображения, подверженного внешним случайным воздействиям.

5.3. Стохастизация резонансного взаимодействия в слабом магнитном поле. В слабом магнитном поле энергия и импульс заряженных частиц испытывают скачкообразные изменения в моменты прохождения через точки черенковского резонанса. Скачкообразность данного процесса сближает его с моделью стандартного отображения. Однако резонансное взаимодействие в слабом магнитном поле представляет собой более сложное явление по сравнению с описываемым стандартным отображением. В модели стандартного отображения стохастичность возникает из-за того, что эффективная частота I (скорость изменения фазы θ) меняется в процессе эволюции. В интересующем нас случае вариации циклотронной частоты становятся существенными для высокоэнергичных — релятивистских частиц. Однако, как показано в [60,61], резонансное взаимодействие в слабом магнитном поле может перейти в стохастический режим даже в нерелятивистском пределе. В этом

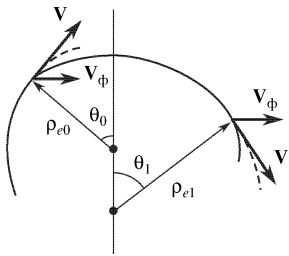


Рис. 5.2. Траектория электрона, взаимодействующего с коротковолновыми высокочастотными колебаниями

резонансного взаимодействия показана на рис. 5.2, уточняющим рис. 4.1. На нем схематически изображены два последовательных акта черенковского резонансного взаимодействия. В каждом из них скорость ларморовского вращения частицы получает приращение

$$\Delta v_{\perp p} = |\Delta \varepsilon_p| \frac{k}{m_e \omega} \cos \left(\Phi_{p-1} + \frac{\pi}{4} \right), \quad (5.13)$$

где $p=1, 2$, $\Delta \varepsilon_p$ определяется формулой (4.2), $\Phi_p = kx_p - \omega t_p$ — фаза колебаний на траектории электрона в момент черенковского резонанса:

случае стохастичность возникает из-за взаимного влияния двух актов черенковского резонансного взаимодействия на каждом обороте по циклотронной окружности.

В типичных условиях плазменного эксперимента последний механизм может действовать как в случае электронов, так и ионов. Для определенности рассмотрим электроны. Предположим, что поперек магнитного поля распространяются коротковолновые высокочастотные электростатические колебания (см. п. 4.1). Картина

$$\Phi_0 = -k\rho_{e0} \sin \theta_0,$$

$$\Phi_1 = k\rho_{e1} \sin \theta_1 - \frac{\omega}{\omega_e} \left[\arcsin \left(\sin \theta_0 \frac{\rho_{e0}}{\rho_{e1}} \right) + \theta_1 \right],$$

$$\theta_p = \arccos(\omega/kv_{\perp p}), \quad v_{\perp 1} = v_{\perp 0} + \Delta v_{\perp 1},$$

считается, что $t_0 = 0$.

Набег фазы между двумя актами резонансного взаимодействия дается выражением

$$\Phi_{10} = \Phi_1 - \Phi_0 = F(v_{\perp 0}, v_{\perp 1}) = k(\rho_{e0} \sin \theta_0 + \rho_{e1} \sin \theta_1) - \frac{\omega}{\omega_e} \left[\arcsin \left(\sin \theta_0 \frac{\rho_{e0}}{\rho_{e1}} \right) + \theta_1 \right], \quad (5.14)$$

После того как электрон, обойдя ларморовскую окружность, приблизится к начальной точке $\theta \approx \theta_0$, он в третий раз попадет в состояние черенковского резонанса. Для набег фазы $\Phi_{21} = \Phi_2 - \Phi_1$ по аналогии с (5.14) нетрудно получить следующее выражение

$$\Phi_{21} = -2\pi \frac{\omega}{\omega_e} - F(v_{\perp 1}, v_{\perp 2}). \quad (5.15)$$

Если амплитуда электрического поля достаточно мала ($\Delta\rho_e \ll \rho_e$), то выражения для приращений фазы (5.14), (5.15) могут быть линеаризованы по скачкам скорости в предшествующих актах черенковского резонансного взаимодействия:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{10} &\approx 2 \sin \theta k \Delta\rho_{e1}, \\ \Delta\Phi_{21} &\approx -2 \sin \theta k (\Delta\rho_{e1} + \Delta\rho_{e2}). \end{aligned}$$

Из этих выражений следует, что если бы на каждом обороте по ларморовской окружности частица лишь однажды попадала в состояние резонанса $\Delta\rho_{e2} = 0$ то резонансное взаимодействие не приводило бы к вариациям фазы ($\Delta\Phi_{20} = \Delta\Phi_{10} + \Delta\Phi_{21} = 0$). В этом случае, по-видимому, не возникала бы фазовая неустойчивость — необходимая предпосылка стохастичности. Устойчивость фазы к скачкам скорости при однократном резонансном взаимодействии является следствием постоянства циклотронной частоты нерелятивистской частицы.

При реальном движении, если выполняется условие $k\Delta\rho_e \geq 1$, или в другом виде

$$\frac{k^2 e \varphi_1}{m \omega_e^2 (k \rho_e)^{1/2}} \sin^{1/2} \theta \geq 1, \quad (5.16)$$

то каждый из актов черенковского резонансного взаимодействия сбивает фазу последующего ($\Delta\Phi_p \geq 1$). В этом случае следует ожидать, что движение будет стохастичным. Численное исследование, проведенное в [60,61], подтверждает эти соображения.

Рассмотренный механизм возникновения стохастичности заведомо исключается, если фазовая скорость колебаний совпадает со скоростью ларморовского вращения. В этом случае условие черенковского резонанса выполняется лишь однократно на каждом обороте по ларморовской окружности — в момент, когда скорость частицы оказывается параллельной фазовой скорости колебаний (угол θ в (5.16) равен нулю). Однако для высокоэнергичных частиц возникновение стохастичности при $\theta = 0$ может быть связано с релятивистской зависимостью циклотронной частоты от энергии.

Рассмотрим сначала явление возникновения стохастичности как следствие перекрытия релятивистских циклотронных резонансов $\omega = n\omega_e(\epsilon)$. При принятых предположениях представим гамильтониан электрона, взаимодействующего с электростатическими колебаниями, распространяющимися поперек магнитного поля в виде

$$H \approx \varepsilon(\mu) + e\varphi \sin[\omega t - k\rho_e(\mu) \sin \theta],$$

где $\varepsilon(\mu) \approx [(mc^2)^2 + 2\mu\omega_e mc^2]^{1/2}$, $\mu = p_{\perp}^2 / (2m\omega_{e0})$, ω_{e0} — нерелятивистская циклотронная частота.

Для значений μ , близких к резонансным $\omega = n\omega_e(\mu)$, используя формулу разложения (2.3) и вводя новую фазу $\theta' = \theta - t\omega/n$, получаем

$$H' \approx \varepsilon(\mu) - \frac{\omega}{n}\mu + e\varphi J_n(k\rho_e) \sin n\theta'.$$

Здесь оставлен лишь один — резонансный член из разложения по функциям Бесселя.

По аналогии со случаем стандартного отображения (см. выше) находим максимальный размах нелинейных осцилляций:

$$\Delta_{\max}\mu \approx \frac{2}{\omega_e} [J_n(k\rho_e)\varepsilon e\varphi]^{1/2}.$$

Поскольку расстояние между соседними циклотронными резонансами равно $\delta\mu \approx \varepsilon/\omega$, то критерий перекрытия резонансов принимает вид

$$16J_n(k\rho_e)n^2\frac{e\varphi}{\varepsilon} > 1.$$

Подойдем теперь к тому же самому явлению, как к следствию сбоя фаз в последовательных актах черенковского резонансного взаимодействия. Электрон входит в состояние резонанса при каждом обороте по ларморовской окружности, в тот момент, когда его вектор скорости близок по направлению к волновому вектору колебаний. Набег фазы между последовательными актами черенковского взаимодействия равен $\Phi = 2\pi\omega/\omega_e(\varepsilon)$.

Приращение энергии $\Delta\varepsilon$, обусловленное взаимодействием с электрическим полем колебаний, вызывает изменение набег фазы на величину $\Delta\Phi = 2\pi(\omega/\omega_e)(\Delta\varepsilon/\varepsilon)$. Согласно анализу, проведенному в п. 5.1, стохастичность наступает при выполнении условия $|\Delta\Phi| > 1$.

Чтобы рассчитать приращение энергии в единичном акте резонансного взаимодействия, используем соотношение

$$\dot{\varepsilon} \approx e(\mathbf{v}\nabla)\varphi.$$

Откуда с учетом равенства

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\varphi$$

получаем

$$\Delta\varepsilon \approx e\omega \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \cos[\omega t - kx(t)] dt.$$

Учитывая равенство $\omega = kv_{\perp}$, во время черенковского резонансного взаимодействия для фазы электромагнитных колебаний $\varphi(t) = \omega t - kx(t)$ можно использовать приближенное выражение

$$\varphi(t) \approx \frac{1}{6}\omega\omega_e^2 t^3 + \text{const.}$$

С учетом данных упрощений получаем

$$\Delta\varepsilon \approx e\omega\varphi \frac{2^{4/3}\pi}{(\omega\omega_e^2)^{1/3}} Ai(0).$$

При этом критерий возникновения стохастичности принимает вид

$$4\pi^2 2^{1/3} Ai(0) \left(\frac{\omega}{\omega_e} \right)^{5/3} \frac{e\varphi}{\varepsilon} > 1.$$

Если теперь учесть асимптотику

$$J_n(\xi) \underset{\xi \approx n \gg 1}{\approx} \left(\frac{2}{n} \right)^{1/3} Ai(0)$$

и принять во внимание то обстоятельство, что критерий перекрытия резонансов первого порядка должен отличаться от критерия $\Delta\Phi > 1$ множителем $4/\pi^2$ (см. п. 5.1), то мы приходим к заключению, что оба подхода к проблеме возникновения стохастичности вполне согласуются друг с другом.

Циклотронное резонансное взаимодействие может проходить в стохастическом режиме также в том случае, когда заряженные частицы движутся в неоднородном магнитном поле, например, удерживаются в магнитной ловушке. В этом случае для них вследствие осцилляций вдоль магнитного поля может периодически выполняться условие $\omega = n\omega_{e,i}(\mathbf{r})$.

Задача о возникновении стохастичности в таких условиях анализировалась в большом числе работ (см., например, [11] и приведенные ссылки).

Глава 3

Колебания плазмы в условиях резонансного взаимодействия

6. Колебания плазмы в однородном магнитном поле

6.1. Колебания плазмы в терминах циркулярно поляризованных электрических полей. Описание резонансного взаимодействия заряженных частиц с электромагнитными колебаниями во внешнем магнитном поле значительно упрощается, если вместо обычно используемых декартовых компонент $E_{x,y}$ ввести циркулярные $E_{\pm} = (E_x \pm iE_y)/\sqrt{2}$ (см. п. 2.1). Напомним, что при временной зависимости электромагнитного поля вида $E \propto \exp(-i\omega t)$ компонента E_+ дает составляющую, вращающуюся в ионную (левую) сторону, E_- — в электронную (правую).

Использование циркулярного базиса оказывается также весьма удобным и при анализе общих волновых свойств плазмы (см., например, [76]). Циркулярному базису соответствуют циркулярные координаты $s_{\pm} = (x \pm iy)/\sqrt{2}$. В этих координатах элемент длины дается выражением

$$dl^2 = 2ds_+ds_- + ds_{\parallel}^2, \quad (6.1)$$

где s_{\parallel} — расстояние вдоль магнитного поля. Элемент длины (6.1) определяет метрический тензор

$$g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где индексы α, β принимают значения $+, -, \parallel$.

Поскольку в циркулярных координатах метрический тензор недиагонален, то следует различать ко- и контравариантные величины $s_{\pm} = s^{\mp}$, $E^{\pm} = E_{\mp} = (E_x \mp iE_y)/\sqrt{2}$ (см., например, [77]).

Для преобразования тензора диэлектрической проницаемости к циркулярному базису используем соотношение

$$\varepsilon_{\alpha}^{\beta} = \varepsilon_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial s^{\alpha}} \frac{\partial s^{\beta}}{\partial x_k}. \quad (6.2)$$

Здесь $s^{\alpha, \beta}$ — циркулярные координаты, $x_{i, k}$ — декартовы. Тензор $\varepsilon_{\alpha}^{\beta}$ симметричен по индексам α, β .

В простейшем случае колебаний холодной плазмы недиагональные компоненты тензора $\varepsilon_{\alpha}^{\beta}$ обращаются в нуль, а для диагональных получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{+}^{+} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) - i\varepsilon_{xy} = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega - \omega_i)} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \omega_e)}, \\ \varepsilon_{-}^{-} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + i\varepsilon_{xy} = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega + \omega_i)} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_e)}, \\ \varepsilon_{\parallel}^{\parallel} &= \varepsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Рассмотрим плоскую волну, бегущую в плоскости XOZ :

$$\begin{aligned} E_{\alpha} &\propto \exp(-i\omega t + ik_x x + ik_y y + ik_{\parallel} z) = \\ &= \exp(-i\omega t + ik_{+} s_{-} + ik_{-} s_{+} + ik_{\parallel} s_{\parallel}). \end{aligned}$$

Для плоской волны волновое уравнение сводится к алгебраическому

$$k_{\alpha}(\mathbf{kE}) - k^2 E_{\alpha} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{\alpha}^{\beta} E_{\beta} = 0. \quad (6.4)$$

Учитывая соотношение $\mathbf{ab} = a_{+}b_{-} + a_{-}b_{+} + a_{\parallel}b_{\parallel}$, приводим (6.4) к матричной форме:

$$\begin{pmatrix} -N_{\parallel}^2 - \frac{1}{2}N_{\perp}^2 + \varepsilon_{+}^{+} & (\frac{1}{2}N_{\perp}^2 + \varepsilon_{+}^{-})e^{2i\vartheta} & (\frac{1}{\sqrt{2}}N_{\perp}N_{\parallel} + \varepsilon_{+}^{\parallel})e^{i\vartheta} \\ (\frac{1}{2}N_{\perp}^2 + \varepsilon_{+}^{-})e^{-2i\vartheta} & -N_{\parallel}^2 - \frac{1}{2}N_{\perp}^2 + \varepsilon_{-}^{-} & (\frac{1}{\sqrt{2}}N_{\perp}N_{\parallel} + \varepsilon_{-}^{\parallel})e^{-i\vartheta} \\ (\frac{1}{\sqrt{2}}N_{\perp}N_{\parallel} + \varepsilon_{+}^{\parallel})e^{-i\vartheta} & (\frac{1}{\sqrt{2}}N_{\perp}N_{\parallel} + \varepsilon_{-}^{\parallel})e^{i\vartheta} & -N_{\perp}^2 + \varepsilon_{\parallel}^{\parallel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{+} \\ E_{-} \\ E_{\parallel} \end{pmatrix} = 0. \quad (6.5)$$

Здесь обозначено $\vartheta = \arctg(N_y/N_x)$.

В случае холодной плазмы, когда недиагональные компоненты тензора ε_α^β обращаются в нуль, условие разрешимости данной системы алгебраических уравнений (дисперсионное соотношение) можно представить в виде [78]

$$1 + \frac{N_\perp^2}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_+ - N^2} + \frac{1}{\varepsilon_- - N^2} \right) + \frac{N_\parallel^2}{\varepsilon_\parallel - N^2} = 0. \quad (6.6)$$

Здесь и в дальнейшем при рассмотрении колебаний холодной плазмы у диагональных компонент тензора ε_α^β будем опускать верхний индекс $\varepsilon_\alpha^\alpha \rightarrow \varepsilon_\alpha$.

Фазовую поляру, т.е. зависимость фазовой скорости колебаний от угла по отношению к магнитному полю, удобно определять с помощью дисперсионного соотношения, преобразованного к виду [76]

$$\frac{1}{2} \sin^2 \theta \left(\frac{1}{V_{ph}^2 - c_+^2} + \frac{1}{V_{ph}^2 - c_-^2} \right) + \frac{\cos^2 \theta}{V_{ph}^2 - c_\parallel^2} = 0, \quad (6.7)$$

где θ — угол между волновым вектором и магнитным полем, $V_{ph} = \omega/k$, $c_\alpha^2 = c^2/\varepsilon_\alpha$.

Дисперсионное соотношение в форме, аналогичной (6.7), часто используется в кристаллооптике. В общем случае двухосного кристалла оно принимает вид (см., например, [79])

$$\frac{\gamma_x^2}{V_{ph}^2 - c_x^2} + \frac{\gamma_y^2}{V_{ph}^2 - c_y^2} + \frac{\gamma_z^2}{V_{ph}^2 - c_z^2} = 0,$$

где γ_i — направляющие косинусы волнового вектора.

Плазма отличается от двухосного кристалла изотропией в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, поэтому в (6.7) входит лишь угол θ . Однако в силу гиротропии — различия отклика на поля с правой и левой поляризацией ($c_+ \neq c_-$), она не эквивалентна более простому одноосному кристаллу, у которого две из трех величин c_i равны.

При выполнении условия (6.6) решением системы (6.2) является вектор [78]

$$\mathbf{E} = (E_+, E_-, E_\parallel) = \text{const} \left(\frac{N_+}{\varepsilon_+ - N^2}; \frac{N_-}{\varepsilon_- - N^2}; \frac{N_\parallel}{\varepsilon_\parallel - N^2} \right). \quad (6.8)$$

Дисперсионное соотношение в форме (6.6) и последнее выражение, характеризующее поляризацию колебаний в холодной плазме, легко запоминаются и, как мы убедимся в дальнейшем, оказываются довольно удобными при анализе различных предельных случаев.

Так, например, выясним при каких условиях происходит «отсечка» колебаний. Чтобы при $N \rightarrow 0$ удовлетворялось дисперсионное соотношение (6.6) какое-то из слагаемых должно содержать неопределенность. Для этого должно выполняться одно из трех условий $\varepsilon_{+,-,\parallel} \rightarrow 0$, которые совпадают с хорошо известными условиями отсечки (см., например, [24]).

В другом предельном случае ($N \rightarrow \infty$), разлагая (6.6) в ряд по $1/N^2$, в первом исчезающем порядке находим

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_+ + \varepsilon_-)N_{\perp}^2 + \varepsilon_{\parallel}N_{\parallel}^2 = 0. \quad (6.9)$$

Вводя обозначение $\varepsilon_{\perp} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{-}) = 1 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2 - \omega_j^2}$, приводим дисперсионное соотношение к общепринятому виду [24]

$$\varepsilon_{\perp} \sin^2 \theta + \varepsilon_{\parallel} \cos^2 \theta = 0. \quad (6.10)$$

Колебания, описываемые дисперсионным соотношением (6.10), являются потенциальными. Действительно, из уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

следует, что при $N \rightarrow \infty$ магнитное поле колебаний должно стремиться к нулю, и следовательно, $\mathbf{E} \approx -\nabla \varphi$.

В реальной (неоднородной) плазме уравнение (6.10) удовлетворяется в какой-то точке (на линии, поверхности). При приближении к данной точке волновой вектор колебаний резко возрастает.

Как отмечено во Введении, явление резкого локального возрастания волнового вектора также принято называть резонансом (пространственным).

Резонанс, который характеризуется соотношением (6.10), часто называют плазменным. В определенном смысле можно утверждать, что он ведет к трансформации колебаний. При приближении к точке плазменного резонанса ввиду увеличения волнового вектора в игру вступают мелкомасштабные тепловые эф-

факты. Это ограничивает величину волнового вектора, приводя к резкому изменению свойств колебаний (см., например, [80]).

Другими характерными примерами резонансов, связанных с трансформацией колебаний, являются альвеновский и ларморовский резонансы (см. ниже). Преимущества использования циркулярного базиса становятся особенно заметными при учете теплового движения заряженных частиц (сравнить, например, с [24,81]).

В этом случае отличны от нуля недиагональные компоненты тензора $\varepsilon_{\alpha}^{\beta}$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{+}^{-} &= \varepsilon_{-}^{+} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}), \\ \varepsilon_{+}^{\parallel} &= \varepsilon_{\parallel}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{xz} + i\varepsilon_{yz}), \\ \varepsilon_{-}^{\parallel} &= \varepsilon_{\parallel}^{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{xz} - i\varepsilon_{yz}).\end{aligned}$$

Введем величину μ_{α}^{β} , которая связана с $\varepsilon_{\alpha}^{\beta}$ соотношением

$$\varepsilon_{\alpha}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} + \mu_{\alpha}^{\beta}, \quad (6.11)$$

если индексы α, β не принимают одновременно значений \parallel , и соотношением

$$\varepsilon_{\parallel}^{\parallel} = 1 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2} \left(1 + 2\pi \int v_{\parallel}^2 \frac{\partial f_{0j}}{\partial v_{\perp}} dv_{\perp} dv_{\parallel} \right) + 2\mu_{\parallel}^{\parallel} \quad (6.12)$$

в противном случае.

В (6.11), (6.12) величины μ_{α}^{β} даются единым выражением

$$\begin{aligned}\mu_{\alpha}^{\beta} &= \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2} \sum_n \int 2\pi \frac{1}{\omega - n\omega_j \operatorname{sgn} e_j - k_{\parallel} v_{\parallel}} \times \\ &\times \left[(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) \frac{\partial f_{0j}}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial f_{0j}}{\partial v_{\parallel}} \right] G_{n,\alpha}(k_{\perp} \rho_j) G_{n,\beta}(k_{\perp} \rho_j) dv_{\perp} dv_{\parallel},\end{aligned} \quad (6.13)$$

где $G_{n,\pm}(\xi) = v_{\perp} J_{n\mp 1}(\xi)$, $G_{n,\parallel}(\xi) = v_{\perp} / \sqrt{2} J_n(\xi)$. В (6.13), как и всюду в настоящей работе, величины ω_j считаются положительными для обоих знаков заряда.

В заключение этого раздела приведем полное дисперсионное уравнение, получающееся из условия разрешимости системы (6.5). Оно обобщает (6.6) на случай «теплой» плазмы, когда отличны от нуля недиагональные компоненты тензора ε_α^β :

$$\begin{aligned}
 & 1 + \frac{N_\perp^2}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_+^+ - N^2} + \frac{1}{\varepsilon_-^- - N^2} \right) + \frac{N_\parallel^2}{\varepsilon_\parallel^\parallel - N^2} - \\
 & - \frac{\varepsilon_-^\parallel (\varepsilon_-^\parallel - \sqrt{2} N_\perp N_\parallel)}{(\varepsilon_-^- - N^2)(\varepsilon_\parallel^\parallel - N^2)} - \frac{\varepsilon_+^\parallel (\varepsilon_+^\parallel - \sqrt{2} N_\perp N_\parallel)}{(\varepsilon_+^+ - N^2)(\varepsilon_\parallel^\parallel - N^2)} - \\
 & - \frac{\varepsilon_+^- (\varepsilon_+^- + N_\perp^2)}{(\varepsilon_-^- - N^2)(\varepsilon_+^+ - N^2)} + \frac{A + B + C - D - E}{(\varepsilon_-^- - N^2)(\varepsilon_+^+ - N^2)(\varepsilon_\parallel^\parallel - N^2)} = 0,
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= 2\varepsilon_+^\parallel \varepsilon_-^\parallel \varepsilon_+^-, \quad B = \sqrt{2} N_\perp N_\parallel \varepsilon_+^- (\varepsilon_-^\parallel + \varepsilon_+^\parallel), \\
 C &= N_\perp^2 \varepsilon_+^\parallel \varepsilon_-^\parallel, \quad D = \frac{1}{2} N_\perp^2 (\varepsilon_+^{\parallel 2} + \varepsilon_-^{\parallel 2}), \quad E = N_\parallel^2 \varepsilon_+^{-2}.
 \end{aligned}$$

6.2. Циклотронные колебания в однородном магнитном поле. Проанализируем свойства электронных циклотронных колебаний, считая сначала плазму холодной. Из (6.8) следует, что если показатель преломления колебаний при $\omega = \omega_e$ конечен, то правополяризованная составляющая электрического поля обращается в нуль — плазма подавляет электрическое поле, отклик на которое (электрический ток) был бы бесконечен.

Дисперсионное уравнение таких колебаний может быть получено из (6.6), если в нем опустить слагаемое, содержащее в знаменателе ε_-^- :

$$1 + \frac{N_\perp^2}{2} \frac{1}{\varepsilon_+ - N^2} + \frac{N_\parallel^2}{\varepsilon_\parallel - N^2} = 0. \tag{6.15}$$

Данное уравнение имеет два решения, описывающие обыкновенные и необыкновенные колебания. При распространении поперек магнитного поля $N_{or}^2 = \varepsilon_\parallel$, $N_{ex}^2 = 2\varepsilon_+$. Отметим, что дисперсионное соотношение обыкновенных колебаний соответствует неопределенности последнего слагаемого в (6.15). В случае поперечного распространения поляризация необыкновенных колебаний левая (ионная), обыкновенных — продольная.

В другом предельном случае ($\theta \rightarrow 0$) показатель преломления необыкновенных колебаний неограниченно возрастает. При этом значение N_{\perp} остается конечным $N_{\perp}^2 \approx 2\varepsilon_{\parallel}$. Чтобы получить этот результат, левую часть (6.15) следует разложить в ряд по $1/N_{\parallel}^2$, удержав члены первого порядка малости по данному параметру.

Рассматриваемые колебания близки к потенциальным, и соответственно, их поляризация к продольной. Следует однако отметить, что они не описываются дисперсионным уравнением (6.9), поскольку последнее справедливо в предположении $N^2 \gg \varepsilon_{\alpha}$, в то время как при получении (6.15) считалось, что $\varepsilon_{-} \gg N^2$.

Дисперсионное соотношение (6.15) не описывает предельного случая необыкновенных колебаний, распространяющихся строго вдоль магнитного поля. Такие колебания, как хорошо известно, имеют чисто электронную (правую) поляризацию, а их показатель преломления равен $N^2 = \varepsilon_{-}$. Данное значение показателя преломления соответствует неопределенности слагаемого $1/(\varepsilon_{-} - N^2)$ в (6.6). Если частота колебаний не равна в точности ω_e , то изменение характера колебаний происходит при конечном значении $\theta \neq 0$.

Таким образом, поведение необыкновенных колебаний, распространяющихся под малым углом к магнитному полю, оказывается довольно сложным. Для его исследования положим в (6.6)

$$\frac{N_{\perp}^2}{\varepsilon_{+} - N^2} \approx -\frac{N_{\perp}^2}{N^2}, \quad \frac{N_{\parallel}^2}{\varepsilon_{\parallel} - N^2} \approx -1 + \frac{N_{\perp}^2 - \varepsilon_{\parallel}}{N^2}$$

и приведем это уравнение к виду

$$\varepsilon_{\parallel} N_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon_{-} N_{\perp}^2 - \varepsilon_{-} \varepsilon_{\parallel} = 0, \quad (6.16)$$

откуда следует

$$N^2 = \frac{\varepsilon_{-}}{1 + \frac{\varepsilon_{-} \theta^2}{2\varepsilon_{\parallel}}}$$

Последнее выражение показывает, что отклонение волнового вектора от направления магнитного поля не влияет на диспер-

сию колебаний: $N^2 \approx \varepsilon_-$ при $\theta \ll \sqrt{\varepsilon_{||}/\varepsilon_-}$. В обратном предельном случае, когда $\theta \gg \sqrt{\varepsilon_{||}/\varepsilon_-}$ имеем $N_{\perp}^2 \approx 2\varepsilon_{||}$.

Отметим, что поляризация колебаний меняется с правой $\mathbf{E} \approx (0, E_-, 0)$ на продольную $\mathbf{E} \approx (0, 0, E_{||})$ при меньших значениях угла ($\theta \approx \varepsilon_{||}/\varepsilon_-$).

Если $\theta = \theta_{cr} = \sqrt{-2\varepsilon_{||}/\varepsilon_-}$, то показатель преломления обращается в бесконечность, что соответствует плазменному резонансу, при котором колебания становятся потенциальными. В плазме малой плотности $\omega_{pe} < \omega$ ($\varepsilon_{||} > 0$) плазменный резонанс осуществляется при $\omega > \omega_e$, причем область углов $\theta < \theta_{cr}$ является областью непрозрачности ($N^2 < 0$). При $\omega_{pe} > \omega$ колебания, испытывающие плазменный резонанс, могут распространяться лишь, если $\omega < \omega_e$ и их область прозрачности расположена при $\theta > \theta_{cr}$.

Поскольку значение угла $\theta = \pi/2$ попадает в область непрозрачности, то при $\omega_{pe} > \omega$ данные колебания нельзя классифицировать как необыкновенные или обыкновенные.

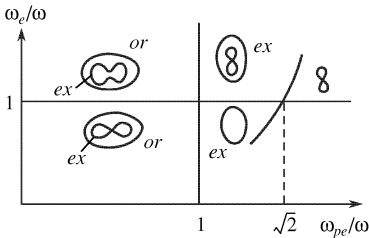


Рис. 6.1. Диаграмма КМА электронных циклотронных колебаний

обыкновенными, для малых значений угла θ не вызывает затруднений. Он может быть проведен с помощью дисперсионного уравнения (6.15), в котором данным колебаниям соответствует неопределенность второго слагаемого $N_{or}^2 \approx \varepsilon_+$. Поляризация этих колебаний при $\theta \rightarrow 0$ левая (ионная). Если $\omega_{pe} > \omega$, то эти колебания при $\theta = \pi/2$ имеют чисто поперечную поляризацию, и поэтому в соответствии с общепринятой классификацией их следует считать необыкновенными.

Тепловое движение заряженных частиц вдоль магнитного поля и в поперечном направлении по-разному влияет на циклотронное резонансное взаимодействие. Из-за эффекта Доплера,

Чтобы наглядно представить диэлектрические свойства плазмы мы используем диаграмму КМА (Клемова–Малэли–Аллиса). На ней схематически изображается фазовая поляра (зависимость модуля фазовой скорости от угла θ). На рис. 6.1 направление магнитного поля соответствует вертикальному.

Анализ другой ветви колебаний, называемых при $\omega_{pe} < \omega$

связанного с продольным движением, линия циклотронного резонанса размывается на область частот порядка $k_{\parallel}v_{Te}$. Это, с одной стороны, приводит к ограничению отклика плазмы на электрическое поле правой поляризации при точном выполнении условия циклотронного резонанса $\omega = \omega_e$, а, с другой, из-за размытия резонансной линии становится возможным резонансное взаимодействие колебаний с $\omega \neq \omega_e$ ($|\omega - \omega_e| \leq k_{\parallel}v_{Te}$), у которых правополяризованная составляющая электрического поля имеет хотя и малую, но конечную величину.

Поперечное тепловое движение влияет на резонансное взаимодействие через эффекты конечного ларморовского радиуса. В п. 2.1 было показано, что если ларморовский радиус заряженных частиц отличен от нуля, то частицы могут резонансно взаимодействовать с колебаниями при произвольной поляризации последних.

Для необыкновенных колебаний, распространяющихся под малым углом к магнитному полю, более существенны эффекты, обусловленные размытием линии циклотронного резонанса. Из-за этого фактора изменение поляризации необыкновенных колебаний с продольной на правую происходит при конечном значении угла

$$\theta^* \approx \varepsilon_{\parallel} \left(\frac{\omega}{\omega_{pe}} \right)^{4/3} \left(\frac{v_{Te}}{c} \right)^{2/3}$$

даже в случае, если $\omega = \omega_e$. Для углов $\theta < \theta^{*1/2}$ дисперсионное соотношение необыкновенных колебаний принимает вид

$$N^3 \approx i \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} q_e \frac{c}{v_{Te}} W(\zeta_e), \quad (6.17)$$

где $\zeta_e = \frac{\omega - \omega_e}{\sqrt{2}k_{\parallel}v_{Te}}$, $q_e = \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_e} \right)^2$. Из (6.17) следует, что колебания с $\omega \approx \omega_e$ сильно затухают при распространении $\text{Im } N \approx \text{Re } N \approx \left(q_e \frac{c}{v_{Te}} \right)^{1/3}$.

Здесь термин «необыкновенные» употребляется в соответствии с классификацией для наиболее интересной области частот $\omega > \omega_{pe}$. (Имеются серьезные проблемы с проникновением колебаний в плотную плазму, для которой $\omega_{pe} > \omega$, см., например, [82].) При продольном распространении необыкновенные колебания имеют правую поляризацию вне зависимости от отношения между ω и ω_{pe} .

В случае необыкновенных колебаний, распространяющихся под углом, существенно большим θ^* , а также обыкновенных при произвольном значении угла θ резонансное взаимодействие оказывает слабое влияние на распространение колебаний с $\omega \approx \omega_e$, и для его учета можно использовать метод последовательных приближений. В нулевом приближении по параметру $k\rho_e$ полное дисперсионное уравнение (6.14) сводится к (6.15).

Последнее описывает распространение колебаний, у которых отсутствует правополяризованная составляющая электрического поля. Такие колебания в приближении холодной плазмы ($k\rho_e = 0$) не взаимодействуют резонансно с электронами. Выделение членов первого порядка по $k\rho_e$ из уравнения (6.14) не представляет труда. Действительно, для величин ε_α^β в соответствии с иерархией резонансного циклотронного взаимодействия (см. п. 2.1) при $\omega \approx \omega_e$ справедлива оценка $\varepsilon_\alpha^\beta \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega k_\parallel v_{Te}} (k_\perp \rho_e)^{\gamma_\alpha + \gamma_\beta}$, где $\gamma_- = 0, \gamma_\parallel = 1, \gamma_+ = 2$. В этой оценке величина $1/k_\parallel v_{Te} = 1/\omega_e k_\parallel \rho_e$ заменяет резонансный знаменатель $1/(\omega - \omega_e)$, характерный для диэлектрического отклика холодной плазмы.

Отметим, что обычно используемое дисперсионное соотношение (см., например, [24,81]) имеет вид полинома по ε_{ik} . Поскольку компоненты тензора с индексами $i, k = x, y$ описывают отклик на смесь полей E_+ и E_- , отдельные члены дисперсионного соотношения содержат составляющие разного порядка по малому параметру $k\rho_e$. Это обстоятельство существенно затрудняет упорядочение дисперсионного уравнения по данному параметру.

Учитывая в (6.14) члены первого порядка по $k\rho_e \ll 1$, получаем следующее выражение для пространственного коэффициента затухания колебаний [11]:

$$\text{Im } k = \pm \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{\omega_e v_{Te}}{c^2 q_e} \cos \theta \frac{N_\perp^4 (N^2 + 2q_e - 1)^2}{(N_\perp^2 + q_e - 1) F(\theta)} V(\xi_{Te}), \quad (6.18)$$

где

$$F(\theta) = [4(1 - q_e)^2 \cos^2 \theta + \sin^4 \theta]^{1/2},$$

$$V(\xi_{Te}) = \text{Re} \frac{1}{W(\xi_{Te})} = \frac{\exp(\xi_{Te}^2)}{|W(\xi_{Te})|}.$$

В (6.18) верхний знак соответствует необыкновенным колебаниям, нижний — обыкновенным. При учете разных знаков знаменателя в (6.18) значение $\text{Im } k$ в обоих случаях, разумеется, оказывается положительным.

Выражение (6.18) не учитывает релятивистского изменения частоты. Этот эффект преобладает над эффектом Доплера для колебаний, распространяющихся почти поперек магнитного поля ($\cos \theta < v_{Te}/Nc$). Коэффициент затухания таких колебаний можно найти, например, в [11,83].

В системах с неоднородным магнитным полем рассматриваемые колебания проходят через область циклотронного резонанса при конечном значении показателя преломления — фазовый циклотронный резонанс не сопровождается пространственным.

Обычно длина волны колебаний с $\omega \approx \omega_e$ мала по сравнению с характерным масштабом неоднородности магнитного поля, поэтому влияние неоднородности на колебания, распространяющиеся под достаточно большим углом к магнитному полю ($\theta \gg \theta^*$), может быть учтено в рамках параметрического подхода.

Считая в (6.18) величину магнитного поля меняющейся по линейному закону $\omega_e(s) = \omega(1 - s/L)$, найдем коэффициент прохождения колебаний через зону циклотронного резонанса $\eta = \exp(-\Gamma)$, где

$$\Gamma = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im } k(s) ds.$$

Здесь s — расстояние вдоль градиента магнитного поля. В силу малого размера резонансной зоны интервал интегрирования распространен на всю ось переменной s .

Коэффициент отражения колебаний, распространяющихся по плазме, помещенной в слабо неоднородное магнитное поле, экспоненциально мал по параметру kr_B , где r_B — характерный масштаб изменения магнитного поля. Если пренебречь отражением, то для коэффициента поглощения колебаний при прохождении через зону циклотронного резонанса получим

$$\zeta = 1 - \eta = 1 - \exp(-\Gamma). \quad (6.19)$$

В выражении для $\text{Im } k(s)$ основная зависимость от координаты s — зависимость множителя $V(\xi T_e(s))$. Интеграл от этого множителя может быть без труда рассчитан, если воспользо-

ваться правилом обхода Ландау. Выберем радиус обхода резонансной точки в плоскости комплексной переменной s настолько большим, чтобы можно было воспользоваться асимптотическим представлением для функции $W(\xi_{Te})$, при этом

$$W^{-1}(\xi_{Te}) \approx -i\sqrt{\pi} \left[\xi_{Te} - \frac{1}{2\xi_{Te}} + O\left(\frac{1}{\xi_{Te}^3}\right) \right],$$

$$\int_C \frac{1}{W(\xi_{Te}(s))} ds = \frac{1}{2} \pi^{3/2} L \frac{k_{\parallel} v_{Te}}{\omega}. \quad (6.20)$$

Заметим, что данный результат является точным, поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} W^{-1}(\xi) d\xi = \frac{\pi^{1/2}}{2} \operatorname{Im} \lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{\pi^{3/2}}{2i} + \int_0^{\xi} \exp(\xi^2) d\xi \right]_{-\xi_1}^{\xi_1} = \frac{\pi^{3/2}}{2}.$$

Используя (6.20), находим

$$\Gamma = \frac{\pi L \omega}{8 c} \left(\frac{v_{Te}}{c} \right)^2 \frac{1}{q_e N} \times \\ \times \frac{N_{\perp}^4 N_{\parallel}^2 (N^2 + 2q_e - 1)^2 (N_{\perp}^2 + q_e - 1)}{(N_{\perp}^2 + N^2 + 2q_e - 3) \sin \theta \cos \vartheta \sin \psi + (N_{\perp}^2 - q_e + 2) \cos \theta \cos \psi}.$$

Здесь углы θ, ψ, ϑ определяют ориентацию вектора ∇B_0 (рис. 6.2).

В системах, предназначенных для удержания плазмы, плазменная электронная частота, как правило, намного превосходит ионную циклотронную. Поэтому в колебаниях с $\omega \approx \omega_i$ электроны, перераспределяясь вдоль магнитного поля, успевают практически уничтожить продольную компоненту электрического поля. В приближении $E_{\parallel} = 0$ или, что эквивалентно $\omega_{pe} = \infty$, дисперсионное уравнение ионных циклотронных колебаний принимает вид

$$1 + \frac{N_{\perp}^2}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_+ - N^2} + \frac{1}{\varepsilon_- - N^2} \right) = 0.$$

Данное уравнение имеет два решения, соответствующие альвеновским и магнитозвуковым колебаниям. При $\omega \approx \omega_i$ ($\varepsilon_+ \gg 1$) альвеновские колебания могут распространяться лишь под ма-

лым углом к магнитному полю и при условии $\omega_i > \omega$. Их электрическое поле вращается в ионную сторону ($E_- \approx 0$), и поэтому они очень интенсивно взаимодействуют с ионами. Показатель преломления альвеновских колебаний с $\omega \approx \omega_i$ равен $N^2 \approx \varepsilon_+$ сравнить с показателем преломления необыкновенных колебаний с $\omega \approx \omega_e$, распространяющихся вдоль магнитного поля (см. выше). Выражение для показателя преломления альвеновских колебаний можно привести к виду (6.17), если в последнем заменить индекс e на i .

Дисперсионное уравнение магнитозвуковых колебаний с $\omega \approx \omega_i$ имеет вид

$$N^2 \approx \frac{2\varepsilon_-}{1 + \cos^2 \theta} \approx \left(\frac{c}{c_A} \right)^2 \frac{1}{1 + \cos^2 \theta},$$

где $c_A = c\omega_i/\omega_{pi}$ — альвеновская скорость.

Поляризация магнитозвуковых колебаний близка к электронной ($E_+ \approx 0$), и поэтому резонансное циклотронное взаимодействие обусловлено эффектами конечного ларморовского радиуса. Коэффициент пространственного затухания магнитозвуковых колебаний, определяемый с помощью (6.14), дается выражением (сравнить с (6.18))

$$\kappa \approx \frac{1}{(8\pi)^{1/2}} \frac{\sin^4 \theta \cos \theta}{(1 + \cos^2 \theta)^3} \frac{v_{Ti} c}{c_A^2} V(\xi_{Ti}).$$

Коэффициент поглощения магнитозвуковых колебаний при прохождении через область ионного циклотронного резонанса, определяемый выражением (6.19), может быть рассчитан тем же методом, что коэффициент поглощения колебаний с $\omega \approx \omega_e$, проходящих через зону электронного циклотронного резонанса (см. выше). При этом для величины Γ получаем следующее выражение:

$$\Gamma = \frac{\pi L \omega}{2 c} N \left(\frac{v_{Ti}}{c} \right)^2 q_i \frac{\sin^4 \theta \cos^2 \theta}{(1 + \cos^2 \theta)^3} \frac{1}{\sin \theta \cos \vartheta \sin \psi + 2 \cos \theta \cos \psi}.$$

Здесь используются те же обозначения, что и на рис. 6.2.

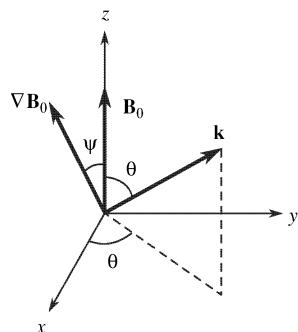


Рис. 6.2. Система координат, используемая при анализе циклотронных колебаний в неоднородном магнитном поле

7. Циклотронные колебания, распространяющиеся вдоль неоднородного магнитного поля

7.1. Формулы Баддена. Выше мы видели, что показатель преломления правополяризованных колебаний, распространяющихся под малым углом к магнитному полю, резко возрастает при $\omega \rightarrow \omega_e$. В силу этого в системах с неоднородным магнитным полем фазовый циклотронный резонанс должен сопровождаться пространственным. Его влияние на распространение колебаний было проанализировано Бадденом [84]. Ниже мы увидим, что область применимости результатов, полученных им, довольно узка. Тем не менее работа [84] имеет чрезвычайно важное значение — в ней была предложена простая математическая модель, позволяющая рассмотреть влияние пространственного резонанса на распространение колебаний. Как оказалось, требуются лишь небольшие модификации модели Баддена, чтобы с ее помощью проанализировать огромное число частных задач о распространении колебаний через зону пространственного резонанса.

Следуя работе [84], рассмотрим правополяризованные колебания, распространяющиеся строго вдоль магнитного поля. Для их описания будем использовать приближение холодной плазмы. Данное приближение справедливо вне резонансной зоны — при выполнении условия $|\omega - \omega_e| \gg k_{\parallel} v_{Te}$. Сшивку решений, справедливых по разные стороны от резонансной зоны, будем осуществлять с помощью правила обхода Ландау. Вопрос о справедливости такого подхода обсуждается ниже.

В интересующем нас случае волновое уравнение может быть получено из дисперсионного соотношения (6.16), в котором следует положить $\theta = 0$ и произвести замену $N \rightarrow -i \frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial z}$, где z — расстояние вдоль магнитного поля

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_- + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left\{ 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega[\omega - \omega_e(z)]} \right\} E_- = 0. \quad (7.1)$$

Как и в [84], предположим, что магнитное поле меняется по простейшему — линейному закону: $\omega_e(z) = \omega(1 - z/L)$. В этом случае волновое уравнение сводится к уравнению Уиттекера (см., например, [21]). Комбинации функций Уиттекера дают решения этого уравнения, описывающие падение волн как со стороны большего магнитного поля (отрицательные значения z):

$$E_-^{(1)}(z) = W_{-i\Gamma/2\pi; 1/2}(\tilde{z}),$$

так и со стороны меньшего (положительные значения z):

$$E_-^{(2)}(z) = M_{-i\Gamma/2\pi; 1/2}(\tilde{z}) + \frac{e^{-\Gamma/2}}{(-i\Gamma/2\pi)!} W_{-i\Gamma/2\pi; 1/2}(\tilde{z}),$$

где $\Gamma = \pi\omega_p^2 L/\omega c$, $\tilde{z} = 2iz\omega/c$.

Первое из них дает волну, убегающую от точки циклотронного резонанса в области $z \rightarrow \infty$:

$$E_-^{(1)}(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} \left(\frac{2\omega z}{c}\right)^{-i\Gamma/2\pi} \exp\left(\frac{i\omega z}{c} - \frac{\Gamma}{4}\right),$$

второе — в области $z \rightarrow -\infty$:

$$E_-^{(2)}(z) \underset{z \rightarrow -\infty}{\approx} \frac{1}{(i\Gamma/2\pi)!} \left(-\frac{2\omega z}{c}\right)^{i\Gamma/2\pi} \exp\left(-\frac{i\omega z}{c} - \frac{\Gamma}{4}\right).$$

Функция $M_{-i\Gamma/2\pi; 1/2}(\tilde{z})$ аналитична в точке $\tilde{z} = 0$, а функция $W_{-i\Gamma/2\pi; 1/2}(\tilde{z})$ имеет в этой точке особенность вида $\tilde{z} \ln \tilde{z}$. Как указывалось выше, для продолжения решения через точку $\tilde{z} = 0$ будем использовать правило обхода Ландау.

В соответствии с этим правилом для регуляризации решений волнового уравнения, к частоте следует добавить малую положительную мнимую часть $\omega \rightarrow \omega + i\nu$ или, что эквивалентно, сместить особую точку в комплексной плоскости вниз с действительной оси.

Обходя в соответствии с этим правилом точку $z = 0$ в комплексной плоскости сверху, получаем, что первое решение в области $z \rightarrow -\infty$ переходит в волну, набегающую на резонансную точку:

$$E_-^{(1)}(z) \underset{z \rightarrow -\infty}{\approx} \left(-\frac{2\omega z}{c}\right)^{-i\Gamma/2\pi} \exp\left(\frac{i\omega z}{c} + \frac{\Gamma}{4}\right),$$

а второе в области $z \rightarrow \infty$ в сумму набегающей и отраженной волн

$$\begin{aligned} E_-^{(2)}(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} & \frac{1}{(i\Gamma/2\pi)!} \left(\frac{2\omega z}{c}\right)^{i\Gamma/2\pi} \exp\left(-\frac{i\omega z}{c} + \frac{\Gamma}{4}\right) + \\ & + \frac{1}{(-i\Gamma/2\pi)!} \left(\frac{2\omega z}{c}\right)^{-i\Gamma/2\pi} \exp\left(\frac{i\omega z}{c} + \frac{\Gamma}{4}\right) (e^{-\Gamma/2} - e^{\Gamma/2}). \end{aligned}$$

Сравнивая амплитуду падающих волн с амплитудами прошедших и отраженных, находим, что коэффициент прохождения одинаков для волн, распространяющихся в противоположных направлениях

$$\zeta = \exp(-\Gamma). \quad (7.2)$$

В то же время коэффициент отражения зависит от направления распространения. А именно, отражение отсутствует при падении волны со стороны большего магнитного поля, а при падении со стороны меньшего коэффициент отражения равен

$$\xi = [1 - \exp(-\Gamma)]^2. \quad (7.3)$$

Коэффициент поглощения определяется соотношением $\eta = 1 - \zeta - \xi$. Он равен

$$\eta = 1 - e^{-\Gamma} \quad (7.4)$$

для волн, падающих со стороны большего магнитного поля, и

$$\eta = e^{-\Gamma}(1 - e^{-\Gamma}) \quad (7.5)$$

— со стороны меньшего.

При $\Gamma \ll 1$ (низкая плотность, большие градиенты магнитного поля) плазма практически одинаково взаимодействует с колебаниями, распространяющимися в противоположных направлениях. В этом случае с точностью до величин порядка Γ , включительно, имеем $\xi \approx 0$. В то же время при $\Gamma \gg 1$ колебания, падающие со стороны большего магнитного поля, почти полностью поглощаются, а со стороны меньшего отражаются. Причина различия становится понятной, если воспользоваться аналогией между квантовомеханическим уравнением Шредингера и адиабатическим волновым уравнением (7.1). В последнем величина $W = (\omega/c)^2$ играет роль энергии частицы, движущейся в «потенциале»

$$U(z) = \frac{\omega_{pe}^2 \omega}{c^2[\omega - \omega_e(z)]}$$

(рис. 7.1). Из рисунков следует, что области распространения колебаний (области прозрачности) разделены потенциальным барьером $z_s < z < z_r$. Здесь z_r — обычная точка поворота, в которой «кинетическая энергия» обращается в нуль ($W = U(z_r)$), z_s — сингулярная точка поворота (точка циклотронного резонанса), в которой «потенциальная энергия» бесконечна.

Колебания, распространяющиеся со стороны меньшего поля, сначала попадают на обычную точку поворота, от которой частично отражаются. К точке циклотронного резонанса проникает лишь часть потока энергии. Ее доля от полной равна коэффициенту прохождения, который при $\Gamma \gg 1$ экспоненциально мал по этому параметру (см. (7.2)). В результате в выражении для коэффициента поглощения появляется множитель $\zeta \ll 1$ (см. (7.5)).

Таким образом, для эффективного поглощения колебаний необходимо, чтобы между излучателем и точкой циклотронного резонанса магнитное поле уменьшалось. Область спадающего магнитного поля в [85] названа магнитным берегом. Это название подчеркивает сходство между распространением электромагнитных колебаний, приближающихся к точке циклотронного резонанса со стороны меньшего магнитного поля при $\Gamma \gg 1$, и волнами на поверхности воды, набегаящими на отлогий берег. В обоих случаях длина волны колебаний уменьшается по мере их приближения к критической точке — берегу в случае волн на поверхности воды, точке циклотронного резонанса в случае электромагнитных колебаний. В критической точке происходит практически полное — безотражательное поглощение.

В задачах, характерных для квантовой механики, безотражательное прохождение частиц через неоднородности потенциала возможно лишь в том случае, если потенциал образует яму вполне определенной формы, а энергия частицы принимает одно из дискретного набора собственных значений [86]. В рассматриваемом случае ни одно из этих условий не выполняется.

Действительно, изменение частоты колебаний (величина $W = (\omega/c)^2$ играет роль энергии частицы) не влияет на вывод о безотражательном прохождении колебаний, в то время как эффективный потенциал образует не яму, а барьер (область непрозрачности). Отличия от квантовомеханических задач обусловлены иным подходом к сингулярности уравнения. В кванто-

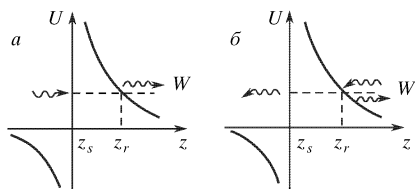


Рис. 7.1. Распространение право поляризованных колебаний в окрестности точки электронного циклотронного резонанса: *a* — со стороны большего магнитного поля (конфигурация магнитного берега), *b* — со стороны меньшего магнитного поля; в области прозрачности, где колебания имеют вид бегущих волн, они показаны волнистой линией

вой механике, например, при анализе движения в сферически-симметричном кулоновском потенциале сингулярное решение исключается за счет соответствующих граничных условий, которые должны удовлетворяться в сингулярной точке — центре симметрии. В задаче о циклотронных колебаниях упрощенное — адиабатическое — уравнение (7.1) также является сингулярным, однако использование правила обхода Ландау позволяет включить в полное решение волнового уравнения и сингулярную часть.

В окрестности резонансной точки z_s это уравнение можно привести к виду

$$E_-'' - \frac{\omega_{pe}^2 L}{c^2(z - z_s)} E_- = 0. \quad (7.6)$$

Здесь опущено слагаемое $(\omega/c)^2 E_-$, которое несущественно при $z \approx z_s$.

Квазиклассическое решение, описывающее колебания, амплитуда которых спадает в глубь области непрозрачности ($z > z_s$), дается выражением

$$E_-(z) \approx \frac{1}{(z - z_s)^{1/4}} \exp \left\{ -2 \frac{\omega_{pe}}{c} [L(z - z_s)]^{1/2} \right\}.$$

При продолжении этого решения в область $z < z_s$ в соответствии с правилом обхода Ландау, т.е. над резонансной точкой, $\arg(z - z_s)$ получает приращение π . Следовательно, в области $z < z_s$ будем иметь волну, бегущую налево:

$$E_-(z) \approx \frac{1}{(z - z_s)^{1/4}} \exp \left(-2i \frac{\omega_{pe}}{c} |L(z - z_s)|^{1/2} \right).$$

Напомним, что временная зависимость колебаний выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$. Если бы при продолжении решения через точку z_s она обходилась снизу (по правилу, обратному правилу обхода Ландау), то в области $z < z_s$ была бы волна, убегаящая от резонансной точки:

$$E_-(z) \approx \frac{1}{(z - z_s)^{1/4}} \exp \left(2i \frac{\omega_{pe}}{c} |L(z - z_s)|^{1/2} \right),$$

т. е. имело бы место не поглощение, а излучение колебаний резонансной точкой.

При продолжении решения через обычную точку поворота правильный результат можно иногда получить, используя сумму выражений, полученных обходом с противоположных сторон [86]. Такой способ продолжения решений в данном случае давал бы в области перед точкой поворота стоячую волну, составленную из падающей и отраженной волн равной амплитуды, т. е. привел бы к выводу об отсутствии поглощения. Заметим, что равенство амплитуд падающей и отраженной волн обусловлено использованием приближенного волнового уравнения (7.6), не содержащего области прозрачности справа от резонансной точки. На самом деле в эту область просачивается часть энергии падающей волны, поэтому даже при отсутствии поглощения амплитуда падающей волны должна превышать амплитуду отраженной.

После соответствующего переопределения величины Γ формулы Баддена можно использовать при произвольной монотонной зависимости магнитного поля от координаты, если распространение колебаний по-прежнему описывать адиабатическим волновым уравнением (7.1). Действительно, рассмотрим сначала колебания, падающие со стороны большего поля. Вывод об отсутствии отражения от резонансной точки обусловлен использованием правила обхода Ландау, и остается неизменным при любой монотонной зависимости $B_0(z)$. Что касается коэффициента прохождения колебаний через область непрозрачности, то выражение (7.2) с

$$\Gamma = 2 \int_{z_s}^{z_r} dz |k(z)| \quad (7.7)$$

следует из самых общих соображений. Используя (7.7) и равенство $\eta = 1 - \zeta$, получаем коэффициент поглощения (7.4).

Теперь обратимся к колебаниям, распространяющимся со стороны меньшего поля. В соответствии с теоремой взаимности коэффициент прохождения не зависит от направления распространения колебаний. Поскольку в данном случае по сравнению с предыдущим амплитуда колебаний в окрестности резонансной точки падает в $\exp(\Gamma/2)$ раз, то в коэффициенте поглощения по мощности появляется множитель $\exp(-\Gamma)$ (см. (7.5)). С помощью равенства $\xi = 1 - \eta - \zeta$ приходим к (7.3).

Формулы Баддена проверялись в экспериментах со слабоионизированной плазмой газового разряда [87]. Разрядную труб-

ку помещали в волновод, а в самой трубке создавали магнитное поле, меняющееся в продольном направлении по линейному закону. Измерялся коэффициент прохождения колебаний через зону циклотронного резонанса ζ и коэффициент отражения от этой зоны ξ . Первый из них вполне удовлетворительно согласовывался с (7.2). Вместе с тем в значениях коэффициента отражения обнаружены заметные расхождения с теорией. Ниже показано, что адиабатическое волновое уравнение (7.1), вообще говоря, непригодно для определения коэффициента отражения. Возможно, что именно это обстоятельство и обусловило расхождение упрощенной теории, основанной на анализе адиабатического волнового уравнения, с данными эксперимента.

7.2. О точности адиабатического волнового уравнения. Наличие сингулярности в (7.1) обусловлено чрезмерной идеализацией модели плазмы, использовавшейся при получении данного уравнения. А именно, следствием того, что в приближении холодной плазмы время резонансного взаимодействия для частиц, находящихся в точке циклотронного резонанса, оказывается бесконечным. На самом деле, в случае бесстолкновительной плазмы в неоднородном магнитном поле время резонансного взаимодействия ограничивается продольным движением частиц, которые пребывают в зоне резонансного взаимодействия конечное время. Последовательный учет движения частиц требует использования кинетического формализма. В этом формализме плазму можно считать составленной из набора монохроматических пучков заряженных частиц, движущихся вдоль магнитного поля. В каждом из пучков при прохождении через зону циклотронного резонанса возбуждается псевдоволна. Псевдоволны несут с собой информацию об электромагнитном поле в резонансной зоне, поэтому при их учете диэлектрический отклик плазмы становится нелокальным, а волновое уравнение интегральным [88]. Скорости псевдоволн, связанных с монохроматическими пучками, различны, поэтому при непрерывном распределении заряженных частиц по скоростям в каждой точке одновременно присутствует набор псевдоволн, прошедших через резонансную точку в различные моменты времени, и поэтому различающихся по фазе.

Разброс псевдоволн по фазам возрастает с удалением от резонансной точки и на достаточно больших расстояниях интерференция псевдоволн приводит к исчезновению нелокальной части диэлектрического отклика. Таким образом, полное нелокальное

волновое уравнение необходимо использовать только на сравнительно небольших расстояниях от резонансной точки. Вне этой области можно ограничиться упрощенным — локальным подходом.

С уменьшением разброса по продольным скоростям размер области, в которой необходимо учитывать поле псевдволн, возрастает. Предельный случай ЭЦР-взаимодействия монохроматического электронного пучка был рассмотрен в [89] (см. также Приложение 3). В этой работе полагалось, что как пучок, так и электромагнитные колебания, падают на резонансную точку со стороны большего магнитного поля. Показано, что на достаточно большом расстоянии от резонансной точки псевдволна отделяется от породившей ее электромагнитной волны, прошедшей через резонансную точку. Поле последней может быть получено с помощью адиабатического волнового уравнения (7.1), дополненного правилом обхода Ландау. Такой подход естественно приводит к коэффициенту прохождения (7.2) и поглощения (7.4).

Локальное приближение становится пригодным на всей действительной оси при анализе колебаний, нарастающих с достаточно большим инкрементом $\text{Im } \omega \gg \omega_e(\rho_e/L)^{1/2}$. В этом случае за характерное время нарастания амплитуды колебаний $t \approx (\text{Im } \omega)^{-1}$ электроны, находящиеся в резонансной зоне, не успевают ее покинуть. В силу того, что основная зависимость от координаты z в задаче о резонансном взаимодействии связана с сочетанием $\omega - \omega_e(z)$, переход к комплексным значениям координаты в соответствии с правилом обхода Ландау эквивалентен переходу к рассмотрению нарастающих колебаний. Именно это обстоятельство позволяет использовать локальные выражения, дополненные правилом обхода Ландау, при анализе циклотронного резонансного взаимодействия в неоднородном магнитном поле.

Однако кинетический отклик, в котором неоднородность магнитного поля учитывается в локальном приближении, дается довольно сложным выражением. Даже на достаточно большом расстоянии от резонансной точки, когда выполняется условие $|\omega - \omega_e(z)| \gg k_{\parallel} v_{Te}$, он содержит бесконечный ряд по степеням $\left(\frac{k_{\parallel} v_{Te}}{\omega - \omega_e(z)}\right)^2$. Хотя тепловые поправки к выражению для отклика, использованному при получении (7.1), малы, они могут оказать весьма существенное влияние на некоторые характеристики решения, а именно, амплитуда отраженной волны, вообще говоря, не может быть определена с помощью адиабатического волнового уравнения.

Чтобы выяснить причину неопределенности, рассмотрим адиабатическое волновое уравнение на таком большом расстоянии от резонансной точки, где и основное резонансное слагаемое, пропорциональное $1/[\omega - \omega_\epsilon(z)]$, достаточно мало. В этой области уравнение (7.1) может быть заменено уравнением

$$E_-'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E_- = 0,$$

которое описывает электромагнитные волны в вакууме с волновым числом $k = \omega/c$. Если резонансное слагаемое учесть в качестве малой поправки, то для волнового числа получим следующее выражение:

$$k = \frac{\omega}{c} - \frac{\Gamma}{2} \frac{1}{z - z_s}.$$

Этому значению волнового числа соответствуют асимптотики решений

$$E_- \approx (z - z_s)^{\mp i\Gamma/2\pi} \exp\left[\pm i\frac{\omega}{c}(z - z_s)\right]. \quad (7.8)$$

Рассмотрим решение, описывающее волну, падающую со стороны меньшего поля. На действительной полуоси $z < z_s$ оно должно иметь вид волны, бегущей налево, т. е. даваться выражением (7.8) с нижними знаками. В верхней полуплоскости, куда мы должны попасть, обходя резонансную точку в соответствии с правилом обхода Ландау (см. рис. 7.2), экспонента $\exp[-i\frac{\omega}{c}(z - z_s)]$ нарастает.

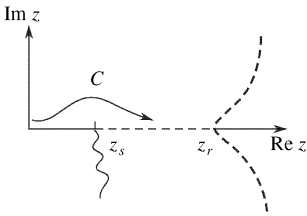


Рис. 7.2. Плоскость комплексного переменного для квазиклассических решений уравнения (7.1): штриховые линии — линии мнимой фазы квазиклассических решений (линии Стокса), волнистая линия — разрез, выходящий из сингулярной точки z_s , C — контур обхода сингулярной точки в соответствии с правилом Ландау

Точное решение волнового уравнения отличается от асимптотики предэкспоненциальным множителем и экспоненциально малыми слагаемыми $\exp[i\frac{\omega}{c}(z - z_s)]$ (см. (7.8) с верхними знаками), которые, вообще говоря, можно добавить в верхней полуплоскости. Возникновение таких слагаемых в асимптотике решения обусловлено явлением Стокса, (см., например, Приложение 1). Условно это явление привязывают к линиям мнимой фазы квазиклассических решений, выходящим из точек поворота, т.е. в данном случае из точек z_r и z_s (см.

рис. 7.2). При переходе из верхней полуплоскости на действительную ось справа от точки z_s обе экспоненты сравниваются по абсолютному значению. Здесь они описывают падающую и отраженную волну, соответственно.

Из результатов, полученных выше, следует, что учет в волновом уравнении резонансного слагаемого $\frac{L}{z-z_s} \left(\frac{\omega p e}{c}\right)^2 E_-$ приводит к коэффициенту отражения (7.3). Однако нельзя гарантировать, что добавление слагаемых вида $\frac{C_n}{(z-z_s)^n} E_-$ ($n > 2$) не изменит этот результат. Действительно, поскольку E_- содержит нарастающую экспоненту, то на достаточном большом расстоянии от точки z_s эти слагаемые превысят спадающую экспоненту, описывающую отраженную волну.

Хотя адиабатическое волновое уравнение непригодно для полного решения задачи о распространении колебаний через область циклотронного резонанса, тем не менее оно позволяет правильно определить ряд их существенных характеристик. С его помощью получают верное значение коэффициента прохождения колебаний через резонансную область (см. 7.2), для чего можно использовать (7.8). Так, амплитуда решения, описывающего волну, распространяющуюся со стороны большего магнитного поля (верхний знак в (7.8)), возрастает при обходе точки z_s сверху на $\exp(\Gamma/2)$, что соответствует коэффициенту прохождения (7.2). То же самое значение коэффициента прохождения получается и с помощью выражения, дающего волну, падающую на резонансную область со стороны меньшего поля и прошедшую через нее (нижний знак в (7.8)). Уточнение предэкспоненты, связанное с учетом в адиабатическом волновом уравнении дополнительных слагаемых вида $\frac{C_n}{(z-z_s)^n} E_-$, приводит лишь к малым поправкам в (7.2).

Верным является также вывод об отсутствии отражения при падении колебаний со стороны большего поля. Действительно, соответствующее решение (верхний знак в (7.8)) спадает в верхней полуплоскости. Следовательно, в данном случае изменение асимптотики решения (явление Стокса) невозможно и отраженная волна не возникает.

7.3. Соответствие кинетики и гидродинамики в задаче о прохождении электромагнитных колебаний через точку циклотронного резонанса. В задаче, рассматриваемой в настоящем пункте, пространственный резонанс является следствием фазового. Исследование фазового резонанса воз-

можно лишь в рамках кинетического описания плазмы. Между тем реакция плазмы на электромагнитное поле колебаний описывалась нами гидродинамически. Естественен вопрос о законности такого упрощенного подхода. Данный вопрос рассмотрен в [90,91].

Мы продемонстрируем эквивалентность двух способов анализа пространственного циклотронного резонанса (гидродинамического и кинетического) на простейшем примере плазмы низкой плотности, когда ее влияние на распространение электромагнитных колебаний можно учитывать в качестве малой поправки.

Рассчитаем сначала коэффициент поглощения колебаний при прохождении через область циклотронного резонанса. Как и выше, будем рассматривать колебания правой круговой поляризации, распространяющиеся вдоль магнитного поля. Из уравнения движения электронов

$$\dot{\mathbf{v}} + [\mathbf{vb}]\omega_e(z(t)) = -\frac{e}{m}\mathbf{E}e^{-i\omega t} \quad (7.9)$$

находим уравнение, описывающее эволюцию величины $v_- = (v_x - iv_y)/\sqrt{2}$:

$$\dot{v}_- + i\omega_e(z(t))v_- = -\frac{e}{m}E_-e^{-i\omega t}. \quad (7.10)$$

Решение последнего имеет вид

$$v_- = -\frac{e}{m}E_-e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^t \exp[i\Phi(t, t')] dt', \quad (7.11)$$

где $\Phi(t, t') = \int_t^{t'} \omega_e(z(t'')) dt'' - \omega(t' - t)$. В (7.9)–(7.11) игнорируется пространственная зависимость электромагнитного поля, что оказывается возможным при расчете коэффициента поглощения.

Моменту времени $t = t_s$, когда электрон проходит через точку циклотронного резонанса, отвечает точка стационарной фазы подынтегрального выражения в (7.11). Используя метод стационарной фазы, находим приращение величины v_- , вызванное циклотронным резонансным взаимодействием

$$\Delta v_- = -\frac{e}{m}E_- \sqrt{\frac{2\pi i}{\ddot{\Phi}_{t_s t_s}}} e^{i\Phi(t, t_s) - i\omega t}.$$

Приращение энергии электронов, усредненное по начальной фазе, квадратично по Δv_-

$$\langle \Delta \varepsilon \rangle = m |\Delta v_-|^2.$$

Полная мощность, поглощаемая потоком электронов через точку циклотронного резонанса, дается выражением

$$\Delta W = n_0 \int f_0(v_{\parallel}) v_{\parallel} m_e |\Delta v_-|^2 dv_{\parallel}. \quad (7.12)$$

Будем считать, что стационарное магнитное поле меняется по линейному закону $\omega_e(z) = \omega(1 - z/L)$, и что электроны движутся вдоль него равномерно ($v_{\parallel} = \text{const}$). При этих предположениях имеем $\ddot{\Phi}_{t_s t_s} = -\frac{v_{\parallel}}{L} \omega$, $\Delta v_- \propto v_{\parallel}^{-1/2}$, и интегрирование по dv_{\parallel} в (7.12) становится тривиальным. В результате получаем

$$\Delta W = \frac{\omega_{pe}^2 L}{4\omega} |E_-|^2.$$

Коэффициент поглощения колебаний, определяемый как отношение поглощаемой мощности к потоку электромагнитной энергии ($S = c/4\pi |E_-|^2$) совпадает с выражением (7.2) ($\eta = 1 - \zeta \approx \Gamma$) в пределе низкой плотности $\Gamma \ll 1$.

В [90] показано, что эквивалентность обоих подходов к расчету коэффициента поглощения сохраняется в случае нелинейной зависимости $B_0(z)$ и при учете неравномерности движения заряженных частиц, обусловленной неоднородностью магнитного поля.

Отражение колебаний с учетом кинетических процессов рассматривалось в [91]. В плазме низкой плотности поглощение колебаний оказалось возможным рассчитать, игнорируя их пространственную зависимость. При анализе отражения такой подход, разумеется, непригоден хотя бы ввиду необходимости различать падающую и отраженную волны.

Для нахождения отраженной волны будем использовать волновое уравнение в виде

$$E''_{-,1} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E_{-,1} = -\frac{4\pi i \omega}{c^2} j_{-,1}, \quad (7.13)$$

где $E_{-,1}$ — поправка к «вакуумному» полю $E_{-,0} = e^{ikz}$ ($k = \pm \omega/c$), обусловленная влиянием плазмы. Последнее обстоятельство

учитывается правой частью (7.13), в которой отклик плазмы $j_{-,1}(z) = -e \int f_0(v_{\parallel}) v_{-}(z, v_{\parallel}) dv_{\parallel}$ на поле $E_{-,0}$ определяется методом интегрирования по траекториям:

$$v_{-}(z, v_{\parallel}) = -\frac{e}{m} \int_{-\infty}^{t(z)} e^{i\Phi(t(z), t')} dt', \quad (7.14)$$

где

$$\Phi(t, t') = kz(t') + \int_t^{t'} [\omega_e(z(t'')) - \omega] dt''.$$

Выражение (7.14) может быть получено с помощью уравнения движения (7.10), в правой части которого наряду с временной зависимостью необходимо учесть и пространственную зависимость $E_{-,0} = e^{ikz}$.

Решение неоднородного уравнения (7.13) выберем в виде

$$E_{-,1} = -\frac{2\pi}{c} \left[\int_{-\infty}^z j_{-,1}(z, z') e^{i\frac{\omega}{c}(z-z')} dz' + \int_z^{\infty} j_{-,1}(z, z') e^{-i\frac{\omega}{c}(z-z')} dz' \right].$$

Здесь при определении пределов интегрирования учтено, что в точке z волна, распространяющаяся вправо, порождается процессами, происходящими левее этой точки, а распространяющаяся влево — правее ее.

Если правополяризованная волна падает на резонансную точку со стороны меньшего поля (справа), то отраженная волна окончательно сформируется при $z \rightarrow \infty$, где ее амплитуда дается выражением

$$E_{-,1}(\infty) = -\frac{\omega_{pe}^2}{2c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\omega}{c}z} dz \int f_0(v_{\parallel}) dv_{\parallel} \int_{-\infty}^0 e^{i\Phi(t(z), t')} dt'. \quad (7.15)$$

Предполагая, как и выше, что магнитное поле меняется по линейному закону $\omega_e(z) = \omega(1 - z/L)$, и что электроны движутся вдоль него равномерно $z(t') = z + v_{\parallel}t'$, для фазы $\Phi(t(z), t')$ получаем следующее выражение:

$$\Phi(z, t') = -\frac{\omega}{c}z - \left(\frac{v_{\parallel}}{c} + \frac{z}{L}\right)\omega t' - \frac{\omega v_{\parallel}}{2L}t'^2.$$

Изменяя в (7.15) порядок интегрирования, вычислим сначала интеграл по dz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-2i\frac{\omega}{c}z - i\frac{z}{L}\omega t'\right) dz = 2\pi\delta\left(2\frac{\omega}{c} + \frac{\omega t'}{L}\right).$$

После этого вычисление интегралов по dt' и dv_{\parallel} не представляет труда, и мы получаем $E_{-,1}(\infty) = -\Gamma$.

Данное выражение соответствует коэффициенту отражения по мощности $\xi = \Gamma^2$. Этот результат совпадает с полученным ранее (7.3) в пределе низкой плотности ($\Gamma \ll 1$). Напомним, что выше рассматривались колебания, падающие на точку циклотронного резонанса со стороны меньшего магнитного поля.

Если бы мы попытались рассчитать амплитуду отраженной волны при падении первичной со стороны большего магнитного поля: $E_{-,0} \propto \exp(-i\omega t + i\frac{\omega}{c}z)$, то также пришли бы к (7.15) с заменой $\exp(-2i\frac{\omega}{c}z) \rightarrow \exp(2i\frac{\omega}{c}z)$. В результате поменялся бы знак первого слагаемого в аргументе δ -функции, и поэтому она была бы отлична от нуля при $t' > 0$, т.е. вне интервала интегрирования по dt' в (7.13). Таким образом, в соответствии с анализом, проведенным ранее, колебания, распространяющиеся со стороны большего магнитного поля, не отражаются от области циклотронного резонанса.

Механизм отражения полезно проанализировать в терминах псевдоволн. Будем рассматривать электронную компоненту плазмы как совокупность монохроматических электронных пучков, движущихся вдоль магнитного поля. Каждый из пучков взаимодействует с падающей волной в своей точке циклотронного резонанса, определяемой условием $\omega = \omega_e(z) + k_{\parallel}v_{\parallel}$. В результате взаимодействия отдельного пучка возникает псевдоволна, распространяющаяся со скоростью пучка v_{\parallel} . Ее фаза дается выражением

$$\Phi_p = -\omega t + \int_{z_s}^z \frac{1}{v_{\parallel}} [\omega - \omega_e(z')] dz' + kz_s. \quad (7.16)$$

Здесь z_s — точка резонанса.

Волновое число псевдоволны равно $k_p(z) = [\omega - \omega_e(z)]/v_{\parallel}$. В точке z'_s , где оно совпадает с волновым числом отраженной волны $k_p(z'_s) = k$, происходит возбуждение последней.

Если волна падает со стороны меньшего магнитного поля ($k = -\omega/c$), то вне зависимости от знака продольной скорости, электрон сначала проходит через точку резонанса с падающей волной ($z_s = -Lv_{\parallel}/c$), а затем с отраженной $z'_s = Lv_{\parallel}/c$. Изменение знака волнового числа падающей волны обращает последовательность прохождения точек z_s и z'_s . Естественно, что в этом случае возбуждение псевдволной отраженной волны становится невозможным.

Таким образом, мы видим, что возникновение волны, отраженной от области циклотронного резонанса, обязано действию того же самого механизма, который приводил к нелокальному отражению колебаний в задаче, рассмотренной в п. 1.6. Специфика циклотронного резонансного взаимодействия состоит в том, что все псевдволны приходят в точки возбуждения вторичной (отраженной) $z'_s = -z_s$ волны сфазированными. Действительно, из (7.16) находим, что фаза псевдволны не зависит от скорости

$$\Phi_p(z'_s, t) = -\omega t - kz'_s.$$

По-видимому, именно сфазированность псевдволн, характерная для случая линейного профиля магнитного поля, приводит к тому, что коэффициент отражения не зависит от вида функции распределения по продольным скоростям, а это в свою очередь позволяет использовать гидродинамическое приближение. Для иных профилей магнитного поля такой упрощенный подход может оказаться неверным.

7.4. Резонансное циклотронное взаимодействие в немонотонно меняющемся магнитном поле. Выше мы видели, что при описании циклотронного резонансного взаимодействия в монотонно меняющемся магнитном поле для диэлектрического отклика плазмы можно было использовать локальное гидродинамическое приближение, дополненное правилом обхода Ландау точки циклотронного резонанса.

Однако такой подход становится несправедливым, если магнитное поле меняется в пространстве немонотонно, и условие циклотронного резонанса $\omega = \omega_e(z)$ выполняется вблизи экстремума магнитного поля. Действительно, в соответствии с правилом Ландау направление обхода определяется знаком производной $d\omega_e/dz$ в резонансной точке. Если эта величина положительна, то резонансная точка обходится в комплексной плоскости снизу;

если отрицательна — сверху. В результате, например, при резонансе вблизи минимума магнитного поля контур обхода принимает вид, изображенный на рис. 7.3.

Анализ проблемы с учетом продольного теплового движения электронов показывает, что контур обхода не может приближаться к резонансным точкам на расстояние, меньшее $\delta z \approx (v_{\parallel T}/\omega'_{e,z})^{1/2}$, где $v_{\parallel T}$ — средняя тепловая скорость продольного движения электронов. В окрестности экстремума (для определенности рассматриваем минимум $\omega_e(z) = \omega_{e0}(1 + z^2/L_0^2)$) имеем $\omega'_{e,z} = 2z_s\omega_{e0}/L_0^2$. Поэтому при $z_s \leq (v_{\parallel T}/\omega)^{1/3} L_0^{2/3}$ контур C должен обязательно пройти через «кинетическую» область — два акта резонансного взаимодействия сливаются в один. В этом случае для описания резонансного взаимодействия необходимо использовать нелокальное — интегральное волновое уравнение. Его решение представляет значительные трудности, поэтому задача о циклотронном резонансном взаимодействии в немонотонно меняющемся магнитном поле была решена лишь в упрощенных постановках. Так, в [92] рассматривались колебания, распространяющиеся под значительным углом к магнитному полю. В этом случае циркулярная составляющая электрического поля, вращающаяся в ту же сторону, что и заряженные частицы, резонирующие с колебаниями, была достаточно мала. Данное предположение позволило решить интегральное уравнение того же типа, что и полученное в [88].

В [64] анализировались электромагнитные колебания, распространяющиеся вдоль магнитного поля, однако плотность плазмы предполагалась достаточно малой, так что ее влияние на колебания можно было учесть в рамках метода последовательных приближений.

Рассмотрим ту же задачу, что и в [64]. Из уравнения движения в форме (7.10) находим приращение Δv_{\parallel} в результате ЭЦР-взаимодействия. Предполагая, что резонанс осуществляется вблизи минимума магнитного поля (см. выше) и скорость продольного движения постоянна, находим

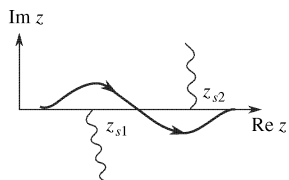


Рис. 7.3. Контур обхода в комплексной плоскости точек циклотронного резонанса вблизи минимума магнитного поля в соответствии с правилом Ландау: волнистые линии — разрезы

$$\begin{aligned} \Delta v_- &= -\frac{eE_-}{m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-i\omega' t' + i \int_{-\infty}^{t'} \omega_e(z(t'')) dt'' \right] dt' = \\ &= \frac{eE_-}{m_e} \exp(i\Phi) \frac{2\pi}{\omega_{e0}^{1/3}} \left(\frac{L_0}{v_{\parallel}} \right)^{2/3} Ai \left[\left(\frac{L_0 \omega_{e0}}{v_{\parallel}} \right)^{2/3} \frac{\omega_{e0} - \omega'}{\omega_{e0}} \right], \quad (7.17) \end{aligned}$$

где $\omega' = \omega - kv_{\parallel}$, Φ — несущественный фазовый множитель.

Отметим сходство (7.17) с выражением для приращения энергии частицы в результате черенковского резонансного взаимодействия в слабом магнитном поле (см. п. 4.1).

При $\omega' - \omega_{e0} \geq \omega_{e0}^{1/3} (v_{\parallel}/L_0)^{2/3}$ резонансное взаимодействие разделяется на два акта в точках $z_{s;1,2} \approx \pm L_0 [(\omega' - \omega_{e0})/\omega_{e0}]^{1/2}$. Если внешние случайные воздействия отсутствуют, а «внутренняя» динамическая стохастичность не успевает развиться, то приращения величины v_- в каждом из актов резонансного циклотронного взаимодействия складываются когерентно — с учетом фазы. Используя асимптотику функции Эйри при положительных значениях аргумента, получаем, что суммарное приращение Δv_- является осциллирующей функцией разности $\omega' - \omega_{e0}$:

$$\begin{aligned} \Delta v_- &\approx \frac{eE_-}{m_e} \exp(i\Phi) \left(\frac{\pi L_0}{v_{\parallel}} \right)^{1/2} \times \\ &\times \frac{2}{[\omega'(\omega' - \omega_{e0})]^{1/4}} \sin \left[\frac{2L_0(\omega' - \omega_{e0})^{3/2}}{3v_{\parallel}\omega'^{1/2}} + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (7.18) \end{aligned}$$

Следует отметить, что для возможности использования упрощенного гидродинамического волнового уравнения, дополненного правилом обхода Ландау, требуется не только пространственная разделенность точек циклотронного резонанса, но и полное разрушение фазовой когерентности. Если когерентность сохраняется хотя бы частично, то необходима модификация правила обхода Ландау, аналогично тому, как это было сделано в [72].

При $\omega' - \omega_{e0} \leq \omega_{e0}^{1/3} (v_{\parallel}/L_0)^{2/3}$ два акта резонансного взаимодействия сливаются в один — второго порядка. Резонансное циклотронное взаимодействие не прекращается и при $\omega' < \omega_{e0}$, когда условие циклотронного резонанса не выполняется ни при каких значениях координаты z . В этом случае, как и в случае резонансного циклотронного взаимодействия в слабом магнитном поле при $\omega > k_{\perp} v_{\perp}$, оно обусловлено эффектом конечности

времени резонансного взаимодействия. Используя асимптотику функции Эйри при больших положительных значениях аргумента, получаем

$$\Delta v_- \approx \frac{eE_-}{m_e} \exp(i\Phi) \left(\frac{\pi L_0}{v_{\parallel}} \right)^{1/2} \times \\ \times \frac{1}{[\omega'(\omega' - \omega_{e0})]^{1/4}} \exp \left[-\frac{2L_0(\omega_{e0} - \omega')^{3/2}}{3v_{\parallel}\omega'^{1/2}} \right]. \quad (7.19)$$

Данное выражение показывает, что интенсивность резонансного взаимодействия ослабевает экспоненциально в области частот $\omega' = \omega - kv_{\parallel} < \omega_{e0}$.

При $\omega < \omega_{e0}$, резонансное взаимодействие обусловлено эффектом Доплера или эффектом конечности времени резонансного взаимодействия. Используя (7.18), (7.19), рассчитаем коэффициент поглощения электромагнитных колебаний, проходящих через область минимума магнитного поля, в этой области частот. Эффект Доплера преобладает при достаточно высокой скорости продольного движения $k^3 L_0^2 v_{Te} / \omega \gg 1$, где v_{Te} — тепловая скорость электронов, распределение электронов по скоростям предполагается максвелловским. Приведенное условие позволяет для величины $|\Delta v_-|^2$ использовать приближенное представление

$$|\Delta v_-|^2 \approx \left(\frac{eE_-}{m_e} \right)^2 \frac{2\pi L_0}{v_{\parallel}} \frac{1}{\omega'^{1/2}(\omega' - \omega_{e0})^{1/2}} \Theta \left(v_{\parallel} - \frac{\omega_{e0} - \omega}{k} \right),$$

где Θ — ступенчатая функция Хевисайда.

Если коэффициент поглощения мал ($\eta \ll 1$), то его можно найти с помощью соотношения $\eta = \Delta W / S$, где $S = \frac{1}{4\pi} k |E_-|^2$ — поток волновой энергии, ΔW — мощность, поглощаемая электронами (см. (7.12)).

Для «хвоста» линии циклотронного поглощения, который определяется «хвостом» максвелловского распределения, нетрудно получить следующую оценку:

$$\eta \approx \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{e0}} \right)^2 \frac{\omega^{3/2} L_0}{c(\omega_{e0} - \omega)^{1/2}} \exp \left[-\left(\frac{\omega_{e0} - \omega}{kv_{Te}} \right)^2 \right]. \quad (7.20)$$

В случае низкой температуры $k^3 L_0^2 v_{Te} / \omega \ll 1$ преобладает эффект конечности времени резонансного взаимодействия. При этом для коэффициента поглощения получаем

$$\eta \approx \frac{\pi}{2 \cdot 3^{1/2}} \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{e0}} \right)^2 \frac{\omega^{3/2} L_0}{c(\omega_{e0} - \omega)^{1/2}} \exp \left[-12^{1/3} \frac{L_0^{2/3} (\omega_{e0} - \omega)}{v_{Te}^{2/3} \omega^{1/3}} \right]. \quad (7.21)$$

Выражения (7.20), (7.21) показывают, что температура электронов определяет закон спада коэффициента поглощения в области частот $\omega < \omega_{e0}$. Это обстоятельство позволяет найти температуру по измерениям зависимости $\eta(\omega)$. Преимущество данного метода состоит в том, что он не требует абсолютной калибровки приемника проходящего излучения. Разумеется, данный метод применим, лишь в том случае, если магнитное поле меняется немонотонно. Этому условию, в частности, удовлетворяет магнитное поле адиабатических ловушек. Описанный метод измерения температуры электронов был успешно применен в экспериментах на установке ОГРА-ЗБ [93]. Предварительно он был опробован на газоразрядной плазме [64].

7.5. Электронные циклотронные колебания вблизи оси адиабатических ловушек. Формулы Баддена характеризуют колебания, распространяющиеся вдоль магнитного поля, величина которого меняется в том же направлении. Последнее, вообще говоря, противоречит условию бездивергентности магнитного поля. Исключения составляют лишь конфигурации силовых линий магнитного поля, обладающие осью симметрии, на которой векторы \mathbf{B}_0 и ∇B_0 могут быть параллельны. Конфигурации подобного типа характерны для адиабатических ловушек. Другое ограничение области применимости формул Баддена связано с тем обстоятельством, что даже при малом отклонении волнового вектора колебаний от направления магнитного поля свойства правополяризованных колебаний резко меняются (см. п. 6.2). Их поляризация из правой круговой превращается в линейную ($E \approx E_{\parallel}$). Такие колебания в окрестности точки циклотронного резонанса становятся квазипотенциальными: испытывают пространственный плазменный резонанс. Характерная особенность квазипотенциальных колебаний — перенос волновой энергии поперек волнового вектора (см., например, [80]). Действительно, для групповой скорости колебаний справедливо выражение $\frac{d\omega}{dk_i} = -\frac{\partial D/\partial k_i}{\partial D/\partial \omega}$, где $D(\omega, k_i)$ — левая часть дисперсионного уравнения $D = 0$, определяющего связь между частотой и волновым вектором колебаний. В случае квазипотенциальных колебаний величина D билинейна

по компонентам волнового вектора $D = \varepsilon_{ik} N_i N_k$ (см. (6.9)). В силу этого

$$k_i \frac{d\omega}{dk_i} = -\frac{2D}{\partial D / \partial \omega} = 0.$$

Циркулярно поляризованные и линейно поляризованные — квазипотенциальные колебания различаются и по областям прозрачности: первые в окрестности точки циклотронного резонанса распространяются только со стороны большего магнитного поля, т.е. в области, где $\omega_e > \omega$, при любой плотности плазмы, в то время как квазипотенциальные в области $\omega < \omega_e$ при $\omega_{pe} < \omega$ (когда $\varepsilon_{\parallel} > 0$) и в области $\omega_e > \omega$ при $\omega_{pe} > \omega$ ($\varepsilon_{\parallel} < 0$).

Чтобы составить представление об особенностях распространения интересующих нас колебаний в реальных условиях, предположим, что они распространяются вблизи оси адиабатической ловушки. Простейшая конфигурация магнитного поля, образующая адиабатическую ловушку, описывается магнитным потенциалом

$$\psi(\mathbf{r}) = \int_0^z B_0(z') dz' - \frac{r^2}{4} B'_{0,z}(z) + r^2 g \cos 2\theta.$$

Здесь используется цилиндрическая система координат, ось $0Z$ которой совпадает с осью ловушки, $B_0(z)$ — магнитное поле на оси. Приведенное выражение справедливо в области малых r ($r B'_{0,z} / B_0 \ll 1$). В этой области пространственная зависимость модуля магнитного поля $\mathbf{B} = \nabla\psi$ дается выражением

$$B(\mathbf{r}) \approx B_0(z) - \frac{r^2}{4} \left(B''_{0,zz} - \frac{1}{2} \frac{B'^2_{0,z}}{B_0} \right) + 2r^2 \frac{g^2}{B_0} - r^2 \frac{B'_{0,z}}{B_0} g \cos 2\theta. \quad (7.22)$$

В простых пробочных конфигурациях магнитное поле возрастает вдоль оси от центра ($z = 0$) по направлению к пробкам $B''_{0,zz} > 0$. При этом оно спадает по радиусу. Такие конфигурации магнитного поля подвержены желобковой неустойчивости. Для обеспечения устойчивости используются так называемые палки Иоффе, делающие магнитное поле азимутально несимметричным ($g \neq 0$). Если параметр g достаточно велик, то магнитное поле возрастает от центра как по направлению к пробкам, так и по радиусу (конфигурация с $\min B$).

Будем исследовать лучевые траектории электромагнитных колебаний в магнитном поле, описываемом магнитным потенциалом (7.22) (см. [94]). Для упрощения ограничимся траекто-

рями, не выходящими из плоскостей $\theta = k\pi/2$ ($k = 1 \div 4$), где магнитное поле даже при $g \neq 0$ двумерно $B_\theta = 0$. Численный анализ общего трехмерного случая не выявил принципиально новых качественных закономерностей.

В области циклотронного резонанса ($\omega \approx \omega_e$) наиболее существенна пространственная зависимость циклотронной частоты в резонансном знаменателе $\varepsilon_- \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega_e - \omega)}$ и соответственно дисперсионное соотношение (6.16) может быть представлено в виде

$$D = \varepsilon_{\parallel} N_{\parallel}^2 \frac{\omega[\omega_e(\mathbf{r}) - \omega]}{\omega_{pe}^2} + \frac{1}{2} N_{\perp}^2 - \varepsilon_{\parallel}.$$

С учетом (7.22) и сделанных выше предположений, для $\omega_e(\mathbf{r})$ будем использовать аппроксимацию

$$\omega_e(\mathbf{r}) = \omega \left(1 + \frac{z'}{L_{\parallel}} + \alpha \frac{r^2}{L_{\perp}^2} \right),$$

где $\alpha = 1$ для конфигураций с $\min B$ и $\alpha = -1$ для аксиально симметричных систем, $z' = z - z_s$, z_s — координата точки циклотронного резонанса на оси ловушки ($r = 0$).

В приближении геометрической оптики траектории волновых пакетов определяются системой уравнений

$$\dot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial D / \partial \mathbf{k}}{\partial D / \partial \omega}, \quad \dot{\mathbf{k}} = \frac{\partial D / \partial \mathbf{r}}{\partial D / \partial \omega}.$$

Если нас интересует только вид траекторий, а не мгновенное положение пакета, то время t можно заменить любым параметром, характеризующим расстояние вдоль траектории. В качестве такого параметра удобно выбрать параметр τ , связанный с t соотношением

$$\frac{d\tau}{dt} = - \left[\frac{\partial}{\partial \omega} D(\mathbf{r}(t), \mathbf{k}(t)) \right]^{-1}.$$

Перенормируем также зависимые переменные: радиус-вектор и показатель преломления $r = (c/\omega)\beta\rho$, $z = (c/\omega)\beta\chi$, $N_r = p_\rho/\beta$, $N_z = p_\chi/\beta$, где $\beta = \frac{\omega_{pe}^2 L_{\parallel}}{2\varepsilon_{\parallel}\omega^2}$. В результате дисперсионное соотношение и уравнения геометрической оптики приобретают простой вид

$$D = p_\rho^2 + (\chi + \mu\rho^2)p_\chi^2 - \nu, \quad (7.23)$$

$$\dot{\rho} = 2p_\rho, \quad \dot{\chi} = 2p_\chi(\chi + \mu\rho^2), \quad \dot{p}_\rho = -2\mu\rho p_\chi^2, \quad \dot{p}_\chi = -p_\chi^2, \quad (7.24)$$

где $\mu = \alpha \frac{2\varepsilon_{\parallel}\omega^2\beta^2}{\omega_{pe}^2 L_{\perp}^2}$, $\nu = 2\varepsilon_{\parallel}\beta^2$. В (7.23), (7.24) считается $N_r = N_{\perp}$, $N_z = N_{\parallel}$, что оказывается справедливым в случае плазмы низкой плотности $\omega_{pe} \ll \omega_e$.

Из последнего уравнения системы (7.24) находим $p_{\chi} = 1/\tau$, а первое и третье уравнение сводятся к уравнению

$$\ddot{\rho} + \frac{4\mu}{\tau^2}\rho = 0.$$

Общее решение последнего имеет вид

$$\rho = A_+\tau^{\gamma_+} + A_-\tau^{\gamma_-},$$

где $\gamma_{\pm} = (1 \pm \sqrt{1 - 16\mu})/2$.

Величину χ удобно находить непосредственно из дисперсионного уравнения (7.23)

$$\chi = -\mu\rho^2 + (\nu - p_{\rho}^2)/p_{\chi}^2.$$

Полученных сведений достаточно, чтобы составить представление об общем характере движения волнового пакета. Рассмотрим сначала движение в поле со «слабым» $\min B$ ($1/16 > \mu > 0$), когда $\text{Im } \gamma_{\pm} = 0, 1 > \gamma_+ > \gamma_- > 0$.

Простейшей является траектория, лежащая на оси симметрии ($A_{\pm} = 0, \rho \equiv N_{\rho} \equiv 0$) (рис. 7.4). Участкам траектории, удаленным от точки циклотронного резонанса соответствует значение параметра $\tau \rightarrow \infty$, при этом $p_{\chi} = 1/\tau \rightarrow 0$, $\chi = \nu\tau^2 \rightarrow \infty$. На этой траектории при $\tau \rightarrow 0$ осуществляется циклотронный резонанс $\chi \rightarrow 0$, $p_{\chi} \rightarrow \infty$. Данная траектория в

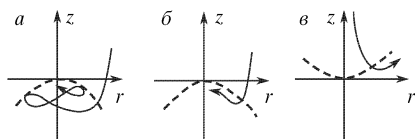


Рис. 7.4. Лучевые траектории электронных циклотронных колебаний в адиабатических ловушках: а — ловушка с $\min B$, $\mu > 1/16$, б — ловушка с $\min B$, $\mu < 1/16$, в — аксиально-симметричная ловушка; штриховая линия — линия электронного циклотронного резонанса ($\omega = \omega_e(\mathbf{r})$)

определенном смысле является аттрактором — с уменьшением параметра τ к ней стремятся траектории общего вида $A_{\pm} \neq 0$, которые при больших значениях этого параметра располагаются вдали от оси $\rho \approx A_+\tau^{\gamma_+} \rightarrow \infty$, $p_{\rho} \approx \frac{\gamma_+}{2}A_+\tau^{\gamma_+-1} \rightarrow 0$. При $\tau \rightarrow 0$ эти траектории подходят к точке циклотронного резонанса ($\rho = \chi = 0$) со стороны отрицательных значений $\chi \approx -\frac{\gamma_-}{4}\rho^2$ ($\rho \approx A_-\tau^{\gamma_-}$), располагаясь в области, где $\omega_e < \omega$, и двигаясь поперек волнового вектора ($p_{\rho} \approx \frac{\gamma_-}{2}A_-\tau^{\gamma_--1} \rightarrow \infty$, $p_{\rho}/p_{\chi} \rightarrow 0$). Данные

характерные особенности говорят о том, что на траекториях общего вида осуществляется не циклотронный резонанс, а плазменный.

Действительно, только для квазипотенциальных колебаний область $\omega_e(\mathbf{r}) < \omega$ является областью прозрачности, а их групповая скорость направлена поперек фазовой.

В конфигурациях магнитного поля с «сильным» $\min B$, когда $\mu > \frac{1}{16}$, $\text{Im } \gamma_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{16\mu - 1}$, $\text{Re } \gamma_{\pm} = \frac{1}{2}$, общий характер движения волновых пакетов остается тем же самым. Отличие состоит лишь в том, что процесс приближения к точке $\rho = \chi = 0$ становится осцилляторным

$$\rho = C_1 \sqrt{\tau} \cos \left(\frac{1}{2} \sqrt{16\mu - 1} \ln \tau + C_2 \right)$$

(см. рис. 7.4).

Рассмотрим, наконец, движение волновых пакетов в поле аксиально симметричной пробочной ловушки ($g = 0$, $\mu < 0$, $\gamma_+ > 0 > \gamma_-$). В этом случае также имеется особая траектория ($\rho \equiv p_{\rho} \equiv 0$), на которой осуществляется циклотронный резонанс, однако она теперь перестает быть аттрактором — траектории общего вида удаляются от нее как при $\tau \rightarrow \infty$, так и при $\tau \rightarrow 0$. Неограниченный рост волнового вектора при $\tau \rightarrow 0$ свидетельствует о плазменном резонансе, поскольку эта часть траектории располагается в области прозрачности квазипотенциальных колебаний ($\omega_e(\mathbf{r}) < \omega$), а вектор групповой скорости на ней стремится стать ортогональным волновому ($|\dot{\rho}/\dot{\chi}| \propto \tau^{-\gamma_-+1} \rightarrow 0$, $|p_{\rho}/p_{\chi}| \propto \tau^{\gamma_-} \rightarrow \infty$).

Следует отметить, что картина траекторий волновых пакетов, весьма сходная с описанной выше, ранее была обнаружена в окрестности точки плазменного резонанса в двумерно неоднородной плазме [80].

8. Ионные циклотронные колебания неоднородной плазмы

8.1. Альвеновский резонанс в неоднородной плазме. Трансформация мод.

Колебания плазмы в области частот порядка ионной циклотронной частоты существенно отличаются от электронных циклотронных. В п. 6.2 было отмечено, что в силу низкой частоты продольная компонента электрического поля ионных циклотронных колебаний оказывается весьма малой. Другое отличие ионных циклотронных колебаний свя-

зано с их большей длиной волны, которая может быть сравнима с поперечным размером плазменного столба, поэтому приближение геометрической оптики, часто использовавшееся при анализе электронных циклотронных колебаний, как правило, оказывается непригодным. Рассмотрение в этом случае принято основывать на ином упрощении, связанном с вытянутостью большинства систем для магнитного удержания в продольном направлении.

В силу меньших поперечных размеров плазмы, в колебаниях быстро устанавливается поперечная структура, характеризуемая единым для всего поперечного сечения плазменного столба значением N_{\parallel} .

Если система слабо неоднородна в продольном направлении, то поперечная структура вместе с N_{\parallel} подстраивается адиабатически при распространении колебаний вдоль магнитного поля.

Поперечное распределение электромагнитных полей следует находить из волнового уравнения. В приближении $E_{\parallel} = 0$ (см. выше) волновое уравнение приобретает компактный вид, если его записать для B_{\parallel} и ввести тензор $\chi_{ik} = (\varepsilon_{ik} - N_{\parallel}^2 \delta_{ik})^{-1}$ [95]:

$$[\mathbf{b}\nabla]_i \chi_{ik} [\mathbf{b}\nabla]_k B_{\parallel} + B_{\parallel} = 0, \quad (8.1)$$

где используются безразмерные координаты $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}\omega/c$; индексы i, k принимают значения x, y ; $\mathbf{b} = \mathbf{B}_0/B_0$.

В том случае когда можно пренебречь эффектами конечного ларморовского радиуса, компоненты тензора ε_{ik} удовлетворяют соотношению $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22}$, $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21}$, соответственно $\chi_{11} = \chi_{22}$, $\chi_{12} = -\chi_{21}$. Учитывая эти соотношения, приводим (8.1) к виду

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \chi_{ik} \frac{\partial B_{\parallel}}{\partial x_k} + B_{\parallel} = 0. \quad (8.2)$$

Отметим, что через тензор χ_{ik} удобно выражать некоторые важные физические величины. Так, в приближении нулевого ларморовского радиуса плотность потока энергии S_i и плотность выделения энергии Q даются выражениями

$$S_i = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Im} \left(B_{\parallel}^* \chi_{ik} \frac{\partial B_{\parallel}}{\partial x_k} \right),$$

$$Q = -\frac{\omega}{4\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{\partial B_{\parallel}^*}{\partial x_i} \chi_{ik} \frac{\partial B_{\parallel}}{\partial x_k} \right).$$

Для того чтобы составить представление о свойствах ионных циклотронных колебаний будем для описания их поперечной структуры использовать квазиклассическое приближение. Соответствующее дисперсионное уравнение можно получить как из волнового уравнения (8.1), так и из дисперсионного уравнения колебаний однородной холодной плазмы (6.6). При втором способе в (6.6) в силу соотношения $\varepsilon_{\parallel} \gg \varepsilon_{\pm}$ следует опустить слагаемое, пропорциональное $1/(\varepsilon_{\parallel} - N_{\parallel}^2)$.

После простых преобразований уравнение приводится к виду (см., например, [96])

$$N_{\perp}^2 = \frac{(\varepsilon_+ - N_{\parallel}^2)(\varepsilon_- - N_{\parallel}^2)}{\varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2}, \quad (8.3)$$

где $\varepsilon_{\perp} = (\varepsilon_+ + \varepsilon_-)/2 \approx 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_i^2}$.

В системах для удержания плазмы магнитное поле слабо меняется в поперечной плоскости, и основная зависимость N_{\perp} от поперечных координат (радиуса) определяется радиальной неоднородностью плотности. Характер зависимости $N_{\perp}(r)$ при $\omega < \omega_i$ иллюстрируется рис. 8.1, см. [97]. Из него следует, что имеются две области прозрачности. Первая существует при $N_{\parallel}^2 < \varepsilon_-(0)$. Она ограничена справа обычной точкой поворота, положение которой определяется условием $\varepsilon_-(r) = N_{\parallel}^2$. Вторая область прозрачности существует, если $N_{\parallel}^2 < \varepsilon_+(0)$. Справа ее также ограничивает обычная точка поворота, в которой $\varepsilon_+(r) = N_{\parallel}^2$. Если выполняется условие $N_{\parallel}^2 < \varepsilon_{\perp}(0)$, то левой границей оказывается сингулярная точка поворота, при приближении к которой $N_{\perp} \rightarrow \infty$. Колебания, распространяющиеся в первой области прозрачности, естественно отождествить с магнитозвуковыми (часто

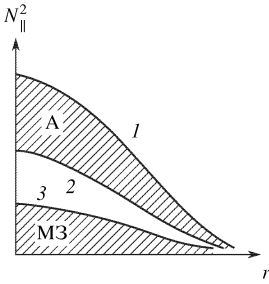


Рис. 8.1. Области прозрачности альвеновских и магнитозвуковых колебаний (заштрихованы) в неоднородном плазменном шнуре на плоскости N_{\parallel}^2 : 1 — $N_{\parallel}^2 = \varepsilon_+(r)$, 2 — $N_{\parallel}^2 = \varepsilon_{\perp}(r)$ (Над кривой 2 расположена область прозрачности нижнегибридных колебаний), 3 — $N_{\parallel}^2 = \varepsilon_-(r)$

используется название — быстрые магнитозвуковые колебания), во второй — с альвеновскими. Действительно, в низкочастотном пределе ($\omega \rightarrow 0$) справедливо приближенное равенство

$\varepsilon_{\pm} \approx \varepsilon_{\perp} \approx (c/c_A)^2$, и дисперсионное соотношение колебаний, распространяющихся в первой области прозрачности, принимает вид $\omega \approx kc_A$. В том же пределе ($\omega \rightarrow 0$) вторая область прозрачности стягивается к сингулярной точке поворота, а условие, определяющее ее положение ($\varepsilon_{\perp}(r) = N_{\parallel}^2$) принимает вид $\omega = k_{\parallel}c_A$. С учетом последнего соотношения сингулярную точку поворота принято называть точкой альвеновского резонанса.

В области частот $\omega > \omega_i$ величины $\varepsilon_{+, \perp}$ отрицательны и в плазме могут распространяться лишь магнитозвуковые колебания.

Области распространения альвеновских и магнитозвуковых колебаний разделены барьером непрозрачности. Проникая через барьер, колебания трансформируются друг в друга. В квазиклассическом приближении коэффициент трансформации (подбарьерного просачивания) дается обычным квантовомеханическим выражением

$$\zeta = 1 - e^{-\Gamma}, \quad (8.4)$$

где $\Gamma = \exp\left(\int_{x_1}^{x_2} |k_{\perp}| dx\right)$, $x_{1,2}$ — границы области прозрачности.

Чтобы получить более подробную информацию о колебаниях следует обратиться к волновому уравнению (8.2), которое в случае аксиально симметричного столба плазмы можно представить в виде [95,97]

$$\nabla_{\perp} \left(\frac{\varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2}{D} \nabla_{\perp} B_{\parallel} \right) + \frac{m}{r} \left(\frac{g}{D} \right)'_r B_{\parallel} + B_{\parallel} = 0, \quad (8.5)$$

где $D = (\varepsilon_{+} - N_{\parallel}^2)(\varepsilon_{-} - N_{\parallel}^2) = (\varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2)^2 - g^2$, $g = -i\varepsilon_{12} = (\varepsilon_{+} - \varepsilon_{-})/2$, m — азимутальное волновое число.

В окрестности сингулярной точки поворота, определяемой условием альвеновского резонанса $\varepsilon_{\perp}(r) = N_{\parallel}^2$, уравнение (8.5) сводится к уравнению типа Баддена. Из анализа этого уравнения, дополненного правилом обхода Ландау сингулярной точки, должно следовать, что в ее окрестности колебания теряют энергию. Как и в случае электронных циклотронных колебаний, распространяющихся со стороны большего магнитного поля, коэффициент поглощения альвеновских колебаний, падающих на точку альвеновского резонанса, равен

$$\eta = 1 - \zeta, \quad (8.6)$$

где коэффициент прохождения ζ дается (8.4).

Однако в случае альвеновских колебаний, в отличие от случая, рассмотренного Бадденом, пространственный резонанс не является следствием фазового, и поэтому волновая энергия не может переходить в энергию движения заряженных частиц. Чтобы выяснить какую форму она принимает, проанализируем явления, происходящие в окрестности точки альвеновского резонанса. При приближении к ней характерный поперечный масштаб альвеновских колебаний сокращается — волновое число возрастает. Когда его значение

$$N_{\perp}^2(r) \approx -\frac{g^2}{\varepsilon'_{\perp,r}(r_s)(r-r_s)}$$

по порядку величины сравнивается с ε_{\parallel} , приближение $E_{\parallel} = 0$, использовавшееся выше, становится несправедливым. Для анализа таких колебаний следует использовать полное волновое уравнение, или соответствующее ему полное квазиклассическое дисперсионное соотношение (6.6) [95-98]. После несложных алгебраических преобразований оно может быть представлено в виде полинома по степеням N_{\perp}^2

$$\varepsilon_{\perp} N_{\perp}^4 + [(N_{\parallel}^2 - \varepsilon_{\perp})(\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel}) + g^2] N_{\perp}^2 + \varepsilon_{\parallel} [(N_{\parallel}^2 - \varepsilon_{\perp})^2 - g^2] = 0. \quad (8.7)$$

В силу того, что $\varepsilon_{\parallel} \gg \varepsilon_{\perp}$ два решения дисперсионного соотношения существенно отличаются по величине. Меньшее с $N_{\parallel}^2 \ll \varepsilon_{\parallel}$ приближенно описывается (8.3), а большее с $N_{\parallel}^2 \approx \varepsilon_{\parallel}$ дается выражением

$$N_{\perp}^2 \approx \varepsilon_{\parallel} \frac{\varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2}{\varepsilon_{\perp}}. \quad (8.8)$$

Соответствующие коротковолновые колебания часто называют нижнегибридными. Если выполняется условие $N_{\parallel}^2 \gg \varepsilon_{\perp}$, нижнегибридные колебания становятся квазипотенциальными, при этом соответствующее дисперсионное уравнение принимает вид (6.9).

Характерный пространственный масштаб нижнегибридных колебаний возрастает по мере приближения к точке альвеновского резонанса ($\varepsilon_{\perp}(r) \rightarrow N_{\parallel}^2$). Когда он сравнивается с уменьшающимся масштабом альвеновских (см. выше) эти ветки становятся неразличимыми (рис. 8.2). Слияние дисперсионных характеристик делает возможной взаимную трансформацию колебаний. Трансформация происходит в малой окрестности точки альвеновского резонанса, где полное волновое уравнение сво-

дится к уравнению крупномасштабных колебаний (8.5), дополненному слагаемым с четвертой производной по радиусу:

$$\left[\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \varepsilon'_{\perp,r}(r_s)(r - r_s) \frac{\partial^2}{\partial r^2} - g^2 \right] B_{\parallel} = 0. \quad (8.9)$$

Это уравнение может быть получено из дисперсионного квазиклассического заменой $N_{\perp}^2 \rightarrow -\frac{\partial^2}{\partial r^2}$ и отбрасыванием малых членов.

Уравнение (8.9) принадлежит классу уравнений с малым параметром перед старшей производной. В (8.9) он пропорционален m_e/m_i . Вдали от точки альвеновского резонанса влияние данного слагаемого на крупномасштабные решения мало и может быть учтено в рамках метода последовательных приближений. Однако в области трансформации, где коэффициент перед второй производной становится малым, это слагаемое столь же существенно, как и другие, не содержащие малого параметра. Для оценки размера области трансформации положим $\partial/\partial r \approx 1/\Delta r$, $\Delta r = r - r_s$. Приравнявая слагаемые со второй и четвертой производными, находим $\Delta r \approx |L/\varepsilon_{\parallel}|^{1/3}$, где L — характерный масштаб изменения плотности. Напомним, что все величины с размерностью длины нормированы на c/ω .

Следует отметить, что хотя уравнение (8.9) описывает явление трансформации, оно не позволяет рассчитать зависимость коэффициента поглощения (трансформации в нижнегибридные) $\eta(\Gamma)$ (8.6). Действительно, в уравнении (8.9) коэффициент перед свободным членом постоянен, а перед второй производной — линейно зависит от координаты. При таких упрощениях область прозрачности слева от точки альвеновского резонанса отсутствует ($\Gamma = \infty$).

Следовательно, анализ уравнения (8.9) должен приводить к выводу о полной трансформации альвеновских колебаний в нижнегибридные (см. ниже).

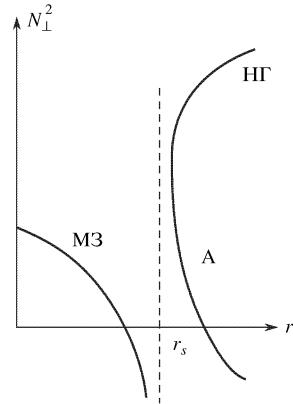


Рис. 8.2. Пространственная зависимость поперечного показателя в неоднородном плазменном шнуре при $N_{\parallel}^2 < \varepsilon_{\parallel}(0)$: r_s — точка альвеновского резонанса

Уравнения типа (8.9) впервые исследовались в теории устойчивости неоднородных течений обычной жидкости при больших числах Рейнольдса. Колебания течений идеальной (невязкой) жидкости описываются дифференциальным уравнением второго порядка (уравнение Рэлея). В этом уравнении коэффициент перед второй производной обращается в нуль в резонансной точке, где скорость течения совпадает с фазовой скоростью колебаний.

При учете вязкости порядок уравнения повышается до четвертого, причем коэффициент перед четвертой производной оказывается мнимым (уравнение Орра–Зоммерфельда) (см. П.4). Анализ последнего показал, что на плоскости комплексной переменной крупномасштабные решения (их асимптотики могут быть получены с помощью идеального уравнения второго порядка) завязываются с мелкомасштабными в некотором секторе комплексного переменного, выходящем из резонансной точки и не захватывающем действительную ось (см. рис. П.4.2). При действительных значениях переменного вязкость существенна только в малой окрестности резонансной точки, поэтому можно сказать, что учет вязкости лишь обеспечивает возможность использования правила обхода Ландау при продолжении решений уравнения колебаний идеальной жидкости через резонансную точку.

Для рассматриваемых нами альвеновских колебаний мелкомасштабные эффекты недиссипативны — обязаны учету инерции электронов, поэтому в отличие от уравнения Орра–Зоммерфельда в уравнении (8.9) коэффициент перед членом с четвертой производной действителен. Данное обстоятельство отражает тот факт, что в плазме наряду с крупномасштабными альвеновскими могут распространяться мелкомасштабные — нижнегибридные колебания, «завязывающиеся» с альвеновскими в точке альвеновского резонанса. Соответственно, как показано в Приложении 4, одна из границ сектора комплексного переменного, выходящего из точки альвеновского резонанса, в котором необходимо учитывать мелкомасштабные эффекты, совпадает с действительной осью (см. также ниже).

Используя результаты, полученные в Приложении 4, проанализируем сначала падение альвеновских колебаний на точку альвеновского резонанса. Крупномасштабные решения, экспоненциально спадающие на действительной оси за точкой r_s даются функциями $U_2 \approx -\pi i H_0^{(2)}(2\sqrt{Px})$ ($-4\pi/3 < \arg x < 0$) и $U_3 \approx \pi i H_0^{(1)}(2\sqrt{Px})$ ($0 < \arg x < 4\pi/3$), где $P = -g^2/\epsilon'_{\perp,r}$,

$x = r - r_s$. Первая из них на действительной положительной полуоси ($x > 0$) представляет сумму крупномасштабного и мелкомасштабного решений:

$$U_2 \approx -\pi i H_0^{(2)}(2\sqrt{Px}) + \frac{\pi^{1/2}}{x^{3/4}\Lambda^{1/4}} \exp\left(-\frac{2i}{3}x^{3/2}\Lambda^{1/2} + \frac{i\pi}{4}\right), \quad (8.10)$$

где $\Lambda = \varepsilon_{\parallel}\varepsilon'_{\perp,r}/\varepsilon_{\perp}$. В этом выражении первое слагаемое описывает крупномасштабные альвеновские колебания, падающие на точку альвеновского резонанса справа, второе — мелкомасштабные ниже гибридные, уходящие от этой точки. Здесь термины «падающий» и «уходящий» характеризуют направления групповой скорости.

Отметим, что коротковолновые нижегибридные колебания, как следует из (8.8), имеют аномальную дисперсию — их групповая скорость направлена навстречу фазовой. Согласно Приложению 4 мелкомасштабное слагаемое в (8.10) необходимо учитывать не только на действительной оси, но и в секторе комплексного переменного $0 < \arg x < 2\pi/3$, где оно существенно превосходит крупномасштабное. Положение этого сектора таково (на рис. П.4.2 он заштрихован), что крупномасштабная часть решения может быть найдена с помощью укороченного уравнения второго порядка, дополненного правилом обхода Ландау. (При спадающей плотности добавление к частоте малой мнимой добавки смещает особую точку с действительной оси вверх, и следовательно, она должна обходиться в плоскости комплексного переменного снизу.) При таком подходе укороченное уравнение второго порядка становится сходным с уравнением Баддена, а коэффициент трансформации крупномасштабных альвеновских колебаний в мелкомасштабные нижегибридные выступает в качестве коэффициента поглощения.

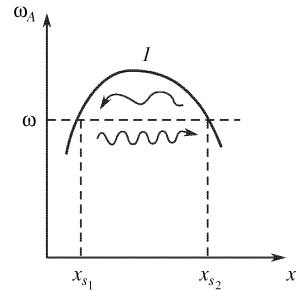


Рис. 8.3. Пространственная структура собственных колебаний: 1 — зависимость альвеновской частоты от координаты; $x_{s;1,2}$ — точки альвеновского резонанса; волнистые линии символически изображают распространение волн, приводящее к установлению собственных колебаний; направление распространения длинноволновых и коротковолновых колебаний может быть синхронно изменено на противоположное

В соответствии с принципом обратимости должен происходить и обратный процесс трансформации нижегибридных колебаний в альвеновские. Соответствующее решение уравнения (8.9) дается функцией U_3 , которая, как и U_2 , экспоненциально спадает при отрицательных x . На полуоси $\arg x = 0$ она принимает вид

$$U_3 \approx \pi i H_0^{(1)}(2\sqrt{Px}) - \frac{\pi^{1/2}}{x^{3/4}\Lambda^{1/4}} \exp\left(\frac{2i}{3}x^{3/2}\Lambda^{1/2} - \frac{i\pi}{4}\right). \quad (8.11)$$

Сектор комплексного переменного x , в котором коротковолновая часть (8.11) экспоненциально нарастает, расположен при $4\pi/3 < \arg x < 2\pi$. Если нас не интересует коротковолновая часть решения, то правильный выбор $\arg x$ в длинноволновой части происходит при обходе точки альвеновского резонанса сверху, т.е. по «анти-Ландау». Это вполне естественно, так как многочисленные примеры показывают, что использование правила обхода Ландау свидетельствует об отборе энергии у колебаний.

В данном же случае происходит обратный процесс накачки энергии в результате трансформации коротковолновых нижегибридных колебаний в длинноволновые альвеновские.

Если альвеновская частота является немонотонной функцией координаты (имеет максимум), то возможны собственные колебания, «запертые» между точками альвеновского резонанса, которые представляют собой сочетание альвеновских и нижегибридных колебаний. При отражении от точек альвеновского резонанса эти колебания трансформируются друг в друга (рис. 8.3).

8.2. Влияние альвеновского резонанса на магнитозвуковые колебания. Задача, рассматриваемая нами, отличается от исследованной Бадденом еще в одном отношении. А именно, электронные циклотронные колебания могли уходить на бесконечность и приходить из бесконечности, в то время как области прозрачности магнитозвуковых и альвеновских колебаний ограничены. По этой причине, например, наряду с альвеновскими колебаниями, уходящими от точки альвеновского резонанса, в ее окрестности должны обязательно присутствовать колебания, падающие на нее.

Альвеновские колебания могут появляться в их области прозрачности в результате подбарьерного просачивания магнитозвуковых. В этом случае они опять принимают вид магнитозву-

ковых, проникая в обратном направлении после отражения от правой границы области прозрачности. Поэтому представляется разумной задача о коэффициенте отражения магнитозвуковых колебаний ξ от правой границы их области прозрачности. Отличие коэффициента отражения от единицы обусловлено трансформацией альвеновских колебаний в нижнегибридные $\xi = 1 - \eta$. При этом характеристики альвеновских колебаний, как промежуточного объекта, не будут входить в конечный результат.

Задача об отражении магнитозвуковых колебаний, падающих слева на границу области непрозрачности, детально анализировалась в [98], длинноволновый предел рассматривался в [99]. Аналитические выражения для коэффициентов отражения и трансформации удается получить в противоположном предельном случае коротковолновых — квазиклассических колебаний.

Предположим сначала, что область прозрачности альвеновских колебаний неограниченна. В этом случае при падении магнитозвуковых колебаний слева $(B_{||}(x)|_{x < x_0} \approx \sqrt{N_{\perp}} \exp(i \int^x N_{\perp} dx))$ в области прозрачности имела бы лишь уходящая волна. В соответствии с теоремой взаимности коэффициент прохождения не зависит от направления распространения колебаний, поэтому амплитуда уходящей волны должна быть уменьшена по сравнению с амплитудой падающей в $\exp(\Gamma/2)$ раз (см. (8.4))

$$B_{||}(x)|_{x > x_0} \approx \sqrt{N_{\perp}} \exp \left[i \int_{x_s}^x N_{\perp}(x) dx - \frac{\Gamma}{2} \right].$$

Здесь отличие предэкспоненциального множителя от обычного, пропорционального $1/\sqrt{N_{\perp}}$, связано с наличием в волновом уравнении слагаемого с первой производной.

В соответствии с формулами Баддена в рассматриваемом случае коэффициент трансформации (поглощения) равнялся бы $\eta = e^{-\Gamma}$. В действительности в области прозрачности альвеновских колебаний устанавливается стоячая волна

$$B_{||}(x) \approx \sqrt{N_{\perp}} \exp \left(-\frac{\Gamma}{2} \right) \cos \left[\int_{x_s}^x N_{\perp}(x) dx - \Phi - \frac{\pi}{4} \right].$$

Здесь фазовый множитель выбран таким, чтобы обеспечить экспоненциальный спад решения в области $x > x_0$, $\Phi = \int_{x_s}^{x_0} N_{\perp}(x) dx$.

В окрестности сингулярной точки поворота x_s уравнение (8.5) (см. также (8.9)) принимает вид уравнения Баддена и соответственно имеем

$$\begin{aligned} B_{\parallel}(x) &\approx C \exp\left(-\frac{\Gamma}{2}\right) \left[\exp(-i\Phi) H_0^{(1)}(2\sqrt{X}) + \exp(i\Phi) H_0^{(2)}(2\sqrt{X}) \right] = \\ &= 2C \exp\left(-\frac{\Gamma}{2}\right) \left[\cos \Phi J_0(2\sqrt{X}) + i \sin \Phi Y_0(2\sqrt{X}) \right], \quad (8.12) \end{aligned}$$

где $C = \pi^{1/2} a^{1/4}$, $X = x/a$, $a = g^2 / |\varepsilon'_x|$.

Трансформация колебаний связана с неаналитической частью решения $Y_0(2\sqrt{X})$. Только у этой части характерный пространственный масштаб стремится к нулю в окрестности точки x_s , что приводит к трансформации.

В гипотетическом случае неограниченной области прозрачности альвеновских колебаний, когда коэффициент трансформации равен $\eta = \exp(-\Gamma)$, решение (8.4) в окрестности точки x_s может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} B_{\parallel}(x) &\approx C \exp\left(-\frac{\Gamma}{2}\right) H_0^{(1)}(2\sqrt{X}) = \\ &= 2C \exp\left(-\frac{\Gamma}{2}\right) \left[J_0(2\sqrt{X}) + i Y_0(2\sqrt{X}) \right]. \quad (8.13) \end{aligned}$$

Сопоставляя (8.12) и (8.13), находим выражение для коэффициента трансформации в интересующей нас задаче:

$$\eta = 4 \exp(-\Gamma) \sin^2 \Phi.$$

Коэффициент трансформации осциллирует при изменении набега фазы альвеновских колебаний $\Phi = \int_{x_s}^{x_0} N_{\perp}(x) dx$. Он обращается в нуль, когда из-за интерференции волны, уходящей от точки x_s и падающей на эту точку, неаналитическая часть решения исчезает.

8.3. Колебания плазмы при наличии «малой добавки». Интерес к магнитозвуковым и альвеновским колебаниям в значительной степени связан с проблемой нагрева плазмы. Такие колебания ввиду большой длины волны сравнительно просто возбуждаются внешними антеннами. Однако они плохо по-

глощаются плазмой. Исключение составляют альвеновские колебания в конфигурации магнитного поля типа магнитного берега. Такие конфигурации характерны для открытых ловушек, в которых магнитное поле меняется в продольном направлении (см. ниже). В случае однородного магнитного поля или при его поперечной неоднородности поперечная составляющая переменного электрического поля, вращающаяся в ионную сторону (левополяризованная составляющая) эффективно подавляется плазмой. (Сравнить с электронными циклотронными колебаниями, распространяющимися под углом к магнитному полю, см. п. 6.2.) В этом случае циклотронное поглощение обусловлено слабыми эффектами Доплера и конечного ларморовского радиуса ионов. В то же время в области частот $\omega < \omega_i$ действует явление альвеновского резонанса, посредством которого энергия длинноволновых магнитозвуковых и альвеновских колебаний перекачивается в коротковолновые нижнегибридные колебания. Ввиду того, что у таких колебаний имеется значительная продольная составляющая электрического поля они могут эффективно поглощаться электронами. Сокращение поперечной длины волны ведет также к увеличению поглощения за счет ионной вязкости, однако в высокотемпературной плазме этот механизм остается слабым.

Чтобы сделать более эффективным циклотронное резонансное взаимодействие в плазму вводятся ионы, циклотронная частота которых отличается от циклотронной частоты ионов основной плазмы. В настоящее время циклотронный нагрев с использованием ионов малой добавки прочно вошел в арсенал методов нагрева термоядерной плазмы (см. например [96]).

Если доля ионов добавки невелика, так что выполняется условие

$$\left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_i}\right)^2 \gg \frac{\omega_{pi}'^2}{\omega_i' k_{\parallel} v_{Ti}'}$$

(штрихом отмечены величины, характеризующие добавку), то ионы добавки не влияют на поляризацию колебаний даже при $\omega = \omega_i'$. В силу того, что $\omega_i' \neq \omega_i$, у колебаний с такой частотой будет иметься левополяризованная составляющая электрического поля. Взаимодействие с ней должно вести к интенсивному нагреву ионов добавки. Предполагается, что в дальнейшем при столкновениях они будут передавать энергию ионам основной плазмы. Мыслим также двухкомпонентный реактор, в котором высокоэнергичные ионы добавки вступают в реакцию с холодными ионами основной плазмы.

Предположим теперь, что выполняется условие, обратное приведенному выше

$$\left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_i}\right)^2 \ll \frac{\omega_{pi}'^2}{\omega_i' k_{||} v_{Ti}'}$$

В этом случае ионы добавки влияют на поляризацию электромагнитных колебаний так же, как и ионы основной плазмы. Рассмотрим колебания двухкомпонентной плазмы. В реальных системах магнитное поле меняется в поперечном направлении, так, например, в токамаках поле спадает по большому радиусу $B_0 \propto 1/R$. Если концентрация ионов добавки невелика $n_i' \ll n_i$, то их влияние на колебания существенно лишь в области циклотронного резонанса, где $\omega_i' \approx \omega$. В этой области неоднородность магнитного поля более существенно влияет на колебания, чем неоднородность плотности. Общий характер зависимости

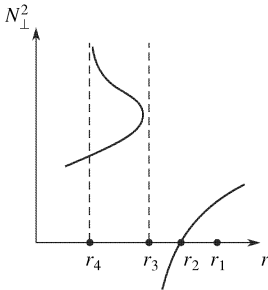


Рис. 8.4. Пространственная зависимость поперечного показателя преломления магнитозвуковых колебаний в окрестности точки циклотронного резонанса ионов добавки: r_1 — точка циклотронного резонанса ионов добавки, r_2 — обычная точка поворота, r_3 — точка дополнительного альвеновского резонанса, r_4 — точка плазменного (гибридного ион-ионного) резонанса

плотности. Общий характер зависимости $N_{\perp}(r)$ зависит от соотношения между ω_i' и ω , плотности основной плазмы, величины $N_{||}$. Примем, например, для определенности, что в плазму дейтерия введена добавка обычного водорода, и что $N_{||}$ удовлетворяет условию $N_{||}^2 < \frac{\omega_{pi}^2}{3\omega_i^2}$.

Используя для N_{\perp} выражение (8.3) и предполагая, что магнитное поле спадает по радиусу, получаем зависимость, изображенную на рис. 8.4 (см. [96]). Как и в случае электронных циклотронных колебаний (см. п. 6.2), колебания

с $\omega \approx \omega_i$ испытывают циклотронный резонанс, лишь если $N_{\perp}/N_{||} \rightarrow 0$. Между тем в силу однородности столба плазмы в продольном направлении мы выше положили $N_{||} = \text{const}$. Данное предположение делает циклотронный резонанс невозможным, поэтому на зависимости (8.3) точка циклотронного резонанса $\omega_i' = \omega$ ничем не выделена. Однако в ее окрестности возникает дополнительная точка альвеновского резонанса

$$(\varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_i^2} - \frac{\omega_{pi}'^2}{\omega^2 - \omega_i'^2} = N_{||}^2),$$

которая при $\omega > \omega_i$ отсутствует в однокомпонентной плазме. Введение добавки приводит еще к одному существенному отличию. На несколько большем расстоянии от точки циклотронного резонанса появляется точка, в которой ε_{\perp} обращается в нуль. При приближении к ней N_{\perp} неограниченно возрастает. Это свидетельствует о так называемом плазменном резонансе (его также называют ион-ионным гибридным), при котором колебания становятся потенциальными.

Действительно, общее условие потенциальности колебаний (6.9) при неограниченном возрастании N_{\perp} и фиксированном значении N_{\parallel} ($\cos \theta = N_{\parallel}/N \rightarrow 0$) принимает вид $\varepsilon_{\perp} = 0$.

В приближении холодной плазмы рост N_{\perp} в окрестности точки плазменного резонанса ограничить невозможно, поскольку данная точка является особой для полного волнового уравнения, описывающего поперечную пространственную структуру колебаний (см., например, (8.9)). В ней обращается в нуль коэффициент перед старшей — четвертой производной по радиусу; в эквивалентном ему квазиклассическом дисперсионном соотношении (8.7) — коэффициент перед N_{\perp}^4 . Волновое уравнение удастся регуляризовать лишь при учете эффектов конечного ларморовского радиуса ионов, что повышает порядок уравнения до шестого. Соответственно и в дисперсионном соотношении появляются слагаемые шестой степени по N_{\perp} , пропорциональные ρ_i^2 .

В окрестности точки плазменного резонанса резко усиливается влияние вязкости и резонансного взаимодействия с электронами, вызываемого поперечной компонентой электрического поля и связанного с конечной величиной их ларморовского радиуса. Такое взаимодействие можно считать циклотронным, происходящим на нулевой гармонике электронной частоты ($\omega = n\omega_e + k_{\parallel}v_{\parallel}, n = 0$). Поскольку в силу уравнений Максвелла поперечное электрическое поле связано с продольным магнитным, а резонансное взаимодействие возникает при выполнении черенковского условия, его также называют пролетной магнитной накачкой (transit time magnetic pumping — ТТМР). Действие вязкости и эффекта ТТМР должно приводить к поглощению нижегибридных колебаний в том случае, если они не успели поглотиться на предшествующем участке траектории.

8.4. «Магнитный берег» в открытых магнитных ловушках. Проанализируем теперь распространение альвеновских колебаний в конфигурации магнитного берега, когда величина магнитного поля меняется в продольном направлении

[97]. В этих условиях фазовый ионный циклотронный резонанс сопровождается пространственным, что приводит к весьма эффективному поглощению колебаний.

Рассмотрим колебания, у которых величина N_{\parallel} лежит в интервале

$$\varepsilon_+(0) > N_{\parallel}^2 > \varepsilon_{\perp}(0).$$

Для таких колебаний альвеновский резонанс невозможен, и область прозрачности альвеновских колебаний простирается до центра плазменного шнура.

Если частота колебаний близка к ионной циклотронной, и $N_{\parallel}^2 \approx \varepsilon_+(0)$, то для поперечного показателя преломления справедливо приближенное выражение

$$N_{\perp}^2(r) \approx 2(\varepsilon_+(r) - N_{\parallel}^2). \quad (8.14)$$

При достаточно больших значениях N_{\perp} , когда справедливо квазиклассическое приближение, условие квантования

$$\int_0^{r_0} N_{\perp}(r) dr \approx \pi p \quad (8.15)$$

позволяет определить значение N_{\parallel} .

Принимая вблизи центра плазменного шнура параболическую зависимость плотности плазмы от радиуса $n_0(r) = n_0(0)(1 - r^2/a^2)$, из (8.14), (8.15) получаем:

$$N_{\parallel}^2 = \left[1 - 2^{3/2} p \frac{c}{a\omega} \frac{\omega_i^{1/2} (\omega_i - \omega)^{1/2}}{\omega_{pi}(0)} \right] \frac{\omega_{pi}^2(0)}{\omega_i(\omega_i - \omega)}.$$

Данное выражение показывает, что по мере приближения к точке циклотронного резонанса N_{\parallel} неограниченно возрастает. Одновременно сокращается область прозрачности альвеновских колебаний

$$\frac{\Delta r}{a} \approx \left(p \frac{c}{a\omega} \right)^{1/2} \left[\frac{2\omega_i(\omega_i - \omega)}{\omega_{pi}^2(0)} \right]^{1/4}.$$

Хотя при этом растет эффективное значение N_{\perp} , но отношение $N_{\perp}/N_{\parallel} \propto (\omega_i - \omega)^{1/4}$ стремится к нулю — колебания «выпрямляются» вдоль магнитного поля. В результате картина распространения альвеновских колебаний в окрестности точ-

ки ионного циклотронного резонанса напоминает распространение электронных циклотронных колебаний, рассмотривавшихся Бадденом. В реальных условиях параметр $\Gamma = \frac{\pi L \omega_{pi}^2}{c\omega}$ чрезвычайно велик, что обеспечивает практически полное поглощение альвеновских колебаний, набегающих на точку циклотронного резонанса, со стороны меньшего магнитного поля. Отметим, что именно при анализе альвеновских колебаний в условиях ионного циклотронного резонанса был введен термин «магнитный берег» [85].

9. Низкочастотные альвеновские колебания неоднородной плазмы

9.1. Вопрос о собственных альвеновских колебаниях неоднородной плазмы. Аналог теоремы Рэлея. На ветви альвеновских колебаний частота может меняться в интервале $0 < \omega < \omega_i$. Однако термин «альвеновские колебания» чаще используется для обозначения низкочастотного предела $\omega \ll \omega_i$. Из рассмотрения, проведенного выше, следует, что при $\omega/\omega_i \rightarrow 0$ область прозрачности альвеновских колебаний стягивается к точке альвеновского резонанса x_s , где $\varepsilon_{\perp}(x_s) = N_{\parallel}^2$ ($\varepsilon_{\perp} \approx (\omega_{pi}/\omega_i)^2 = (c/c_A)^2$, c_A — альвеновская скорость). В ее окрестности уравнение альвеновских колебаний (8.5) принимает вид

$$\nabla_{\perp} \left(\frac{1}{\varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2} \nabla_{\perp} B_{\parallel} \right) = 0. \quad (9.1)$$

В этом же пределе из уравнений Максвелла для поперечных компонент электрического поля можно получить выражение

$$\mathbf{E}_{\perp} = \frac{i}{\varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2} \text{rot} \mathbf{B}_{\parallel} = -\frac{1}{\varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2} \left(N_y B_{\parallel}; i \frac{\partial B_{\parallel}}{\partial x} \right). \quad (9.2)$$

Для электрического поля, определяемого соотношением (9.2), уравнение (9.1) эквивалентно условию потенциальности поперечной составляющей $\mathbf{E}_{\perp} = -\nabla_{\perp} \varphi$. Напомним, что в альвеновских колебаниях продольная компонента электрического поля мала и уравнение (8.5) было получено в предположении $E_{\parallel} = 0$. Это возможно лишь за счет векторного потенциала $\mathbf{A} = (0, 0, A_{\parallel})$, где $A_{\parallel} = N_{\parallel} \varphi$. Векторный потенциал обеспечивает также осцилляции магнитного поля. В этом отношении альве-

новские колебания напоминают так называемые ТЕМ-моды коаксиальных волноводов, в которых за счет выполнения условия $A_{\parallel} = N_{\parallel}\varphi$ электрическое и магнитное поля также оказываются чисто поперечными (перпендикулярными оси волновода) (см., например, [100]).

С учетом (9.2) условие равенства смешанных производных $\partial^2 B_{\parallel}/\partial x\partial y = \partial^2 B_{\parallel}/\partial y\partial x$ принимает вид

$$\nabla_{\perp} \left[(\varepsilon_{\perp} - N_{\parallel}^2) \nabla_{\perp} \varphi \right] = 0. \quad (9.3)$$

Именно это уравнение обычно используется для описания низкочастотных альвеновских колебаний неоднородной плазмы (см., например, [12,101,102] и приведенные ссылки).

Для волнового уравнения (9.3), так же, как и для уравнения (8.5), рассматривавшегося в §8, точка альвеновского резонанса является особой. В ее окрестности становятся существенными мелкомасштабные эффекты, при учете которых порядок уравнения повышается до четвертого

$$\alpha \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} n_0 [\omega^2 - \omega_A^2(x)] \frac{\partial \varphi}{\partial x} - N_y^2 n_0 [\omega^2 - \omega_A^2(x)] \varphi = 0. \quad (9.4)$$

Если, как и в §8, для регуляризации задачи учесть эффекты инерции электронов, то для величины α получим выражение $\alpha = -n_0 \omega^4 / \omega_{pe}^2$. Однако в случае низкочастотных колебаний с $\omega \ll \nu_e$, где ν_e — частота электрон-ионных столкновений, более существенно трение электронов о ионы, при этом $\alpha = -in_0 \omega^3 / 4\pi\sigma$, σ — проводимость плазмы. В общем случае $\alpha = n_0 \omega^2 / \varepsilon_{\parallel}$, где $\varepsilon_{\parallel} = 1 - \omega_{pe}^2 / [\omega(\omega + i\nu_e)]$.

В §8 отмечалось, что если интересоваться только крупномасштабной частью решения волнового уравнения и игнорировать его тонкую структуру в окрестности точки альвеновского резонанса, то можно ограничиться сингулярным уравнением, дополненным правилом обхода особой точки по Ландау. В Приложении П.4.3 справедливость этого утверждения доказана для низкочастотных альвеновских колебаний, описываемых уравнениями (9.3), (9.4).

Два линейно независимых решения укороченного волнового уравнения (9.3) в окрестности точки альвеновского резонанса ведут себя как

$$E_{y1} \approx C_1, \quad E_{y2} \approx C_2 \ln(x - x_s).$$

Если, например, считать, что плотность спадает с координатой x , то особую точку x_s в соответствии с правилом обхода Ландау следует обходить в плоскости комплексного переменного x снизу. Следуя этому правилу, находим, что решения, заданные по разные стороны от сингулярной точки x_s , сопрягаются посредством соотношения

$$\ln(x_s - x) - i\pi \leftrightarrow \ln(x - x_s). \quad (9.5)$$

$(x < x_s)$ $(x > x_s)$

Данное соотношение показывает, что при продолжении сингулярного решения через точку альвеновского резонанса у него появляется регулярная часть, отличающаяся по фазе на $\pi/2$.

Используем соотношение (9.5) при рассмотрении вопроса о собственных альвеновских колебаниях неоднородной плазмы. На специфику этого вопроса было указано в [103]. Ниже мы следуем [101]. Рассмотрим модельную задачу, предположив, что плазма с монотонно спадающим профилем плотности заключена между двумя идеально проводящими плоскостями $x = x_{1,2}$. Помножив (9.3) на φ^* и проинтегрировав по частям, получаем

$$\int_{x_1}^{x_2} [\omega^2 - \omega_A^2(x)] |\nabla_{\perp} \varphi|^2 dx = 0.$$

Это равенство может быть удовлетворено, лишь если $\omega_A(x_2) > \omega > \omega_A(x_1)$. Предположим сначала, что решение регулярно в точке x_s . Проинтегрируем (9.3) один раз по x

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{f(x_s)}{f(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow x_s} + \frac{N_y^2}{f(x)} \int_{x_s}^x f(x') \varphi(x') dx', \quad (9.6)$$

где $f(x) = n_0[\omega^2 - \omega_A^2(x)]$. В окрестности точки x_s регулярное решение выражается через функцию Бесселя от мнимого аргумента

$$\varphi(x) \propto I_0[N_y(x - x_s)] = 1 + \frac{1}{2} N_y^2 (x - x_s)^2 + \dots$$

Поэтому в (9.6) первое слагаемое обращается в нуль, а второе имеет тот же знак, что и разность $x - x_s$. Таким образом, регулярное решение возрастает по обе стороны от особой точки, и следовательно, не может обратиться в нуль ни при каком значении координаты x .

Сумму регулярного и сингулярного решений можно сделать равной нулю на одной из границ. Однако, как было отмечено выше, при прохождении решения через точку x_s у него появляется дополнительная регулярная составляющая, отличающаяся по фазе на $\pi/2$ или $-\pi/2$. Эта составляющая не обращается в нуль.

Таким образом, в плазме с монотонно меняющейся плотностью (альвеновской частотой) собственные альвеновские колебания отсутствуют. Данное утверждение можно считать аналогом теоремы Рэлея, справедливой для обычной жидкости при больших числах Рейнольдса (см. §10).

В обоих этих случаях отсутствие незатухающих собственных колебаний — следствие сингулярности волновых уравнений и использования правила обхода Ландау для продолжения решения через особые точки. Аналогичная сингулярность встречается в волновом уравнении, описывающем распространение электромагнитных колебаний через точку циклотронного резонанса, см. §7.

Выше было пояснено, что использование правила обхода Ландау приводит к тем же результатам, что и учет дополнительных процессов, проявляющихся в окрестности особой точки и вызывающих диссипацию энергии колебаний. В задаче об альвеновских колебаниях это эффекты конечной проводимости плазмы или инерции электронов. В первом случае энергия альвеновских колебаний непосредственно диссипируется в окрестности точки альвеновского резонанса, во втором — уносится мелкомасштабными нижнегибридными колебаниями.

9.2. Ограниченность теоремы Рэлея. Аналог теоремы Рэлея, доказанный выше, относился к случаю неоднородной плазмы. Естественен вопрос о степени неоднородности, при которой доказательство теряет силу. Для ответа на него вспомним, что доказательство основывалось на использовании правила обхода Ландау. Оно, в свою очередь, предполагает, что окрестность резонансной точки, в которой существенны мелкомасштабные эффекты $\delta x_s \approx \left| \frac{\alpha}{n_0(\omega_A^2)_x} \right|^{1/3}$, мала по сравнению с размером плазмы Δx . Если выполняется обратное условие $\Delta x \ll \delta x_s$, то неоднородность плазмы не играет роли, при этом на первый план выступают мелкомасштабные эффекты, обусловленные неидеальностью плазмы (конечная проводимость, инерция электронов и т. д.). В такой плазме собственные колебания могут существовать.

В то же время имеются ситуации, когда использование правила обхода Ландау оказывается незаконным, несмотря на выполнение условия $\Delta x \gg \delta x_s$. Так, в [104] были рассмотрены колебания с частотой, близкой к альвеновской, рассчитанной по граничной плотности плазмы. В этом случае, для того чтобы удовлетворить граничным условиям, необходимо проанализировать решение в малой окрестности точки альвеновского резонанса, где существенны мелкомасштабные эффекты, обусловленные конечностью продольного отклика ε_{\parallel} или, что эквивалентно, отличным от нуля значением E_{\parallel} . Считая, что выполняется условие $\varepsilon_{\parallel} \gg N_{\perp}^2$, из (6.8) находим

$$E_{\parallel} \approx \frac{N_{\parallel}}{\varepsilon_{\parallel}} (\mathbf{N}_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}) \approx i \frac{N_{\parallel}}{\varepsilon_{\parallel}} \Delta_{\perp} \varphi.$$

Конечность E_{\parallel} необходимо учитывать вблизи правой стенки, к которой близка точка альвеновского резонанса. На самой идеально проводящей стенке $E_{\parallel} = 0$, и поэтому граничные условия принимают вид

$$\varphi(x_2) = \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{x=x_2} = 0.$$

Здесь учтено, что вблизи точки альвеновского резонанса выполняется условие $\partial^2/\partial x^2 \gg N_y^2$.

Что касается левой стенки, то на ней достаточно удовлетворить единственному условию

$$\varphi(x_1) = 0.$$

Следуя [104], будем считать, что граничная точка x_2 не слишком близка к точке альвеновского резонанса, так что выполняется условие $|x_2 - x_s| \gg \delta x_s$, и поэтому в ее окрестности решения можно разделить на быстро меняющиеся и медленно меняющиеся. При этом оказывается, что значение $\varphi(x_2)$ определяется, в основном, медленно меняющейся частью решения, а $\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{x=x_2}$ — быстро меняющейся. Именно это обстоятельство, как мы увидим ниже, дает возможность рассчитать аналитически асимптотику спектра альвеновских колебаний.

Будем считать для определенности, что выполняется условие $(\omega_A^2)'_x > 0$, и предположим, что частота электрон-ионных

столкновений превышает частоту рассматриваемых колебаний. В этом случае величина Λ , введенная в Приложении 4 равна

$$\Lambda = -i \frac{4\pi\sigma(\omega_A^2)'_x}{\omega^3 N_y^2}, \quad \arg \Lambda = -\frac{\pi}{2}.$$

Расположение характерных линий C_k и секторов S_k на плоскости комплексного переменного $\xi = N_y(x - x_s)$ приведено на рис. 9.1. В каждом из секторов S_k соответствующее сингулярное крупномасштабное решение U_k становится мелкомасштабным экспоненциально нарастающим, как бы ни была велика проводимость плазмы. Поскольку сектор S_2 не захватывает никакой

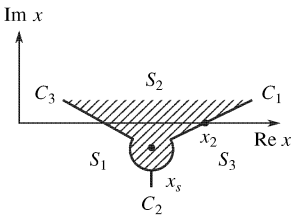


Рис. 9.1. Плоскость комплексного переменного x при собственных значениях частоты «приграничных» альвеновских колебаний: x_2 — граничная точка, x_s — точка альвеновского резонанса, заштрихована область, в которой неприменимо приближение идеальной плазмы

из действительных полуосей, то решение U_2 удобно выбрать в качестве одного из линейно независимых решений укороченного «идеального» уравнения альвеновских колебаний (9.3). Вторым является регулярное решение V .

Решение уравнения (9.4), удовлетворяющее граничным условиям, представим в виде

$$\varphi(x) = V(\xi) + DA_1(\xi) + FU_2(\xi). \quad (9.7)$$

Здесь $A_1(\xi)$ — быстро меняющееся решение, экспоненциально спадающее слева от точки x_s . Его вкладом на левой границе можно пренебречь. Единственному граничному условию на этой границе можно удовлетворить подбором константы F . Ниже мы увидим, что правая граничная точка x_2 близка к границе заштрихованного сектора на рис. 9.1. В этой области с помощью соотношений (П.4.15), а также асимптотических представлений (П.4.19), (П.4.20) получаем

$$U_2(\xi) = K_0(\xi) + \frac{\pi^{1/2}}{\Lambda^{1/4}\xi^{3/4}} \exp\left(-\frac{2i}{3}\Lambda^{1/2}\xi^{3/2} + \frac{i\pi}{4}\right),$$

$$A_1(\xi) \approx 2\pi i I_0(\xi) + \frac{2\pi^{1/2}i}{\Lambda^{1/4}\xi^{3/4}} \sin\left(\frac{2}{3}\Lambda^{1/2}\xi^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Предположим, что граница x_2 удалена от точки альвеновского резонанса на такое расстояние, что выполняются условия

$1 \gg |\xi| \gg |\Lambda|^{-1/3}$. В этом случае быстро осциллирующие слагаемые в (9.7) малы по сравнению с медленно меняющимися, но в то же время именно они определяют величину $\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{x=x_2}$. Данное обстоятельство позволяет удовлетворить граничному условию $\varphi(x_2) = 0$ подбором константы D . При этом второе граничное условие $\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{x=x_2} = 0$ будет приближенно удовлетворено при выполнении условий

$$F \exp\left(-\frac{2i}{3}\Lambda^{1/2}\xi_2^{3/2} + \frac{i\pi}{4}\right) + 2iD \sin\left(\frac{2}{3}\Lambda^{1/2}\xi_2^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad (9.8)$$

где $\xi_2 = N_y(x_2 - x_s)$, константы D, F по порядку величины равны единице. С логарифмической точностью условие (9.8) будет выполнено, если $\frac{2}{3}i\Lambda^{1/2}\xi_2^{3/2} = n\pi$.

Последнее соотношение определяет спектр затухающих собственных колебаний

$$\omega_n \approx \omega_A(x_s) - \left(\frac{3}{2}n\pi\right)^{2/3} \frac{|\omega'_{A,x}|}{N_y |\Lambda|^{1/3}} e^{i\pi/6},$$

(см. рис. 9.2). Как видно из рисунка на комплексной плоскости собственные значения частоты попадают на прямую, наклоненную к действительной оси под углом $\pi/6$.

Проведенное рассмотрение показывает, что вывод об отсутствии собственных колебаний, полученный с помощью «идеального» уравнения (9.2), свидетельствует о недостаточности приближения идеальной плазмы. В реальной плазме существуют «приграничные» затухающие собственные колебания, как бы ни была велика ее проводимость. Рост проводимости вызывает лишь сгущение спектра.

В системах с аксиальной симметрией центр симметрии играет роль одной из граничных точек. С ним также могут быть связаны собственные колебания (см. [105]). В этой работе рассматривалась неравновесная плазма, что приводило к неустойчивости «приграничных» колебаний (см. также ниже).

Доказательство теоремы Рэлея, приведенное в п. 9.1, основывалось на использовании правила обхода Ландау. Такой подход

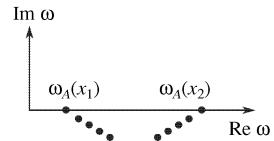


Рис. 9.2. Спектр собственных колебаний в плазме с монотонным профилем альвеновской скорости

оказывается незаконным в том случае, если в рассматриваемом интервале величина $\omega_A^2(x)$ меняется немонотонно, а частота колебаний близка к экстремуму $\omega_A^2(x)$ (ср. с п. 7.4). Не исключено, что колебания с таким значением частоты могут оказаться собственными.

Специфические собственные колебания существуют в токамаках. Шир магнитного поля токамака вызывает зависимость N_{\parallel} от координаты, причем для колебаний, в достаточной степени вытянутых вдоль магнитного поля ($N_{\parallel} \ll N_{\perp}$) может найтись точка, в которой N_{\parallel} обращается в нуль. В ее окрестности $\omega_A^2(x) \propto x^2$. В этой области ввиду малой величины ω_A становится существенной связь между различными полоидальными модами, обусловленная полоидальной неоднородностью магнитного поля токамака. В результате возникают специфические ТАС-моды, представляющие собой совокупность связанных полоидальных мод. Если в плазме присутствует популяция быстрых ионов, такие колебания могут оказаться неустойчивыми (см., например, [106]).

9.3. Эволюция начальных возмущений. 9.3.1. Общие соотношения. При анализе эволюции возмущений сплошных сред обычно принято разлагать их по системе собственных функций, соответствующих собственным колебаниям рассматриваемой среды. Если система собственных функций полна, то такое представление позволяет проследить за судьбой произвольного начального возмущения. В случае альвеновских колебаний из-за отсутствия широкого класса незатухающих собственных колебаний естественно обратиться к непосредственному анализу эволюции начальных возмущений (см. [101,102]). Разумно использовать для этой цели метод преобразования Лапласа, который пригоден для анализа произвольных начальных возмущений. При этом оказывается, что сингулярность волнового уравнения альвеновских колебаний, приводя к устранению собственных функций, вызывает появление объектов нового вида, имеющих сингулярную пространственную структуру и в своей совокупности образующих непрерывный частотный спектр $\omega = \omega_A(x)$. Такие объекты рассматривались также в [107,108].

Другим существенным результатом анализа эволюции начальных возмущений является вывод о том, что само сингулярное волновое уравнение пригодно для описания лишь начального этапа эволюции гладких (крупномасштабных) возмущений.

В общем же случае требуется использовать полное волновое уравнение, учитывающее и мелкомасштабные эффекты, существенные в окрестности точки альвеновского резонанса.

Если временное уравнение, соответствующее (9.4), преобразовать по Лапласу, то для образа Лапласа

$$\varphi(x, \omega) = \int_0^{\infty} \varphi(x, t) \exp(i\omega t) dt$$

получим неоднородное уравнение с правой частью, характеризующей начальное возмущение:

$$\alpha \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} n_0 [\omega^2 - \omega_A^2(x)] \frac{\partial \varphi}{\partial x} - N_y^2 n_0 [\omega^2 - \omega_A^2(x)] \varphi = C_\omega(x). \quad (9.9)$$

Используя формализм функции Грина, находим решение уравнения (9.9) и производим обратное преобразование Лапласа. При этом для искомой величины $\varphi(x, t)$ получаем следующее выражение:

$$\varphi(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma} e^{-i\omega t} d\omega \int G_\omega(x, x_0) C_\omega(x_0) dx_0, \quad (9.10)$$

где функция Грина имеет следующий вид (см., например, [109]):

$$G_\omega(x, x_0) = -\frac{1}{\alpha W_{1,2,3,4}} \times \begin{cases} \varphi^{(1)}(x) W_{2,3,4}(x_0) + \varphi^{(3)}(x) W_{1,2,4}(x_0) & \text{при } x > x_0, \\ \varphi^{(2)}(x) W_{1,3,4}(x_0) + \varphi^{(4)}(x) W_{1,2,3}(x_0) & \text{при } x < x_0. \end{cases}$$

Здесь $\varphi^{(1,2)}(x)$ — линейно-независимые решения (9.3), которые на достаточно большом расстоянии от точки альвеновского резонанса переходят в решения укороченного уравнения (9.2). Выберем решение $\varphi^{(1)}(x)$, спадающим справа от точки $x_s(\omega)$, и $\varphi^{(2)}(x)$, спадающим слева. Для простейшего линейного профиля $\omega_A^2(x)$ имеем

$$\varphi^{(1,2)}(x) = K_0 [\pm N_y (x - x_s(\omega))]. \quad (9.11)$$

Другую пару решений $\varphi^{(3,4)}(x)$ выберем таким образом, чтобы вне окрестности точки альвеновского резонанса они оставались мелкомасштабными

$$\varphi^{(3,4)}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{k}} \exp \left[\pm i \int^x k(x') dx' \right],$$

где $k^2(x) = n_0(x)[\omega^2 - \omega_A^2(x)]/\alpha$. В (9.11) $W_{i,j,k}(x) = W(\varphi^{(i)}(x), \varphi^{(j)}(x), \varphi^{(k)}(x))$ — функциональные определители. Для уравнений вида (9.3) полный функциональный определитель $W_{1,2,3,4}$ не зависит от координат.

Функция Грина дает решение уравнения (9.9) при правой части вида $C_\omega(x) = \delta(x - x_0)$. Очевидно, что совокупность таких элементарных возмущений со всеми возможными значениями x_0 составляет полную систему. Временная эволюция отдельного элементарного возмущения описывается интегралом

$$\varphi(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma} e^{-i\omega t} G_\omega(x, x_0) d\omega. \quad (9.12)$$

Асимптотика интегралов вида (9.10), (9.12) определяется особенностями подынтегрального выражения, рассматриваемого как функция ω . Если бы однородное уравнение (9.3) имело собственные функции, то одно и то же решение удовлетворяло граничным условиям как при $x \rightarrow \infty$, так и при $x \rightarrow -\infty$. В результате при собственных значениях частоты функциональный определитель обращался бы в нуль, а функция Грина имела полюс. Однако уравнение (9.3) не имеет собственных функций с $\text{Im } \omega \geq 0$, локализованных в области монотонного изменения $\omega_A^2(x)$. Поскольку помимо этого полное уравнение четвертого порядка регулярно, и следовательно, его решения (а не их асимптотические представления!) также регулярны, то функция Грина не должна иметь особенностей при $\text{Im } \omega > 0$. Отсюда следует, что все возмущения при $t \rightarrow \infty$ должны затухать.

Определение закона затухания является нашей задачей. Ниже мы увидим, что ввиду отсутствия собственных функций он отличается от простого экспоненциального $\exp(-\gamma t)$ и существенно различен для малых ($t < t_s$) и больших времен ($t > t_s$).

Здесь $t_s \approx \left| \frac{n_0 \omega}{\alpha \omega_A^2} \right|^{1/3}$ — характерное время, по истечении которого на эволюцию гладких возмущений начинают влиять мелкомасштабные эффекты. Это время можно определить из следующих соображений.

Укороченное уравнение (9.2) имеет особенность при $\omega = \omega_A(x)$, когда коэффициент перед второй производной в (9.2) обращается в нуль. Поэтому естественно ожидать, что на интегралы (9.10), (9.12) определяющее воздействие окажет зависимость решений от сочетания $\omega - \omega_A(x)$. При такой зависимости каждому частотному интервалу $\delta\omega$ может быть поставлен в соответствие пространственный $\delta x = \delta\omega / \left| \omega'_{A,x} \right|$, и наоборот.

Мелкомасштабные эффекты становятся существенными на расстояниях $\delta x_s \approx \left| \frac{\alpha}{n_0 \omega \omega'_{A,x}} \right|^{1/3}$ от резонансной точки. Этому расстоянию соответствует частотный интервал $\delta\omega_s \approx \left| \omega'_{A,x} \right| \delta x_s$, с которым по «соотношению неопределенности» связано характерное время $t_s \approx \delta\omega_s^{-1}$.

9.3.2. Малые времена ($t \ll t_s$). Соображения, приведенные выше, показывают, что при $t \ll t_s$ пространственные интервалы $|x - x_s| \leq \delta x_s$, в том числе и малая окрестность точки x_s , в которой проявляются мелкомасштабные эффекты, не могут оказать существенного воздействия на эволюцию возмущений.

В области $|x - x_s| \gg \delta x_s$ для решений $\varphi^{(1-4)}(x)$ можно использовать приближенные асимптотические представления. При $|x - x_s| \gg \delta x_s$ в функции Грина, составленной из этих выражений, можно пренебречь малыми слагаемыми, пропорциональными $\varphi^{(3,4)}(x)$.

Используя также условия

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial x^n} \varphi^{(3,4)} \right| \gg \left| \frac{\partial^n}{\partial x^n} \varphi^{(1,2)} \right|,$$

представим детерминанты, стоящие при $\varphi^{(1)}(x)$ и $\varphi^{(2)}(x)$ в следующем виде:

$$W_{2,3,4}(x_0) \approx \varphi^{(2)}(x_0) W(\partial\varphi^{(3)}/\partial x_0, \partial\varphi^{(4)}/\partial x_0),$$

$$W_{1,3,4}(x_0) \approx \varphi^{(1)}(x_0) W(\partial\varphi^{(3)}/\partial x_0, \partial\varphi^{(4)}/\partial x_0)$$

соответственно. Аналогичным образом получаем

$$W_{1,2,3,4} = W_{1,2}(x_0) W(\partial^2\varphi^{(3)}/\partial x_0^2, \partial^2\varphi^{(4)}/\partial x_0^2).$$

В результате этих преобразований для функции Грина находим следующее простое выражение, соответствующее идеальному уравнению альвеновских колебаний (9.3):

$$G_{\omega}(x, x_0) \approx \frac{i}{\pi n_0(\omega_A^2)'_x} \begin{cases} \varphi(1)(x)\varphi^{(2)}(x_0) & \text{при } x > x_0, \\ \varphi^{(2)}(x)\varphi(1)(x_0) & \text{при } x < x_0. \end{cases}$$

Принимая во внимание (9.11) и учитывая наличие логарифмической особенности у функции $K_0(k(x-x_s))$, получаем следующее асимптотическое выражение интеграла (9.12):

$$\varphi(x, x_0, t) \approx \frac{i}{\pi n_0(\omega_A^2)'_x t} (e^{-i\omega_A(x)t} + e^{-i\omega_A(x_0)t}) K_0(N_y |x - x_0|). \quad (9.13)$$

Из (9.13) следует, что начальное возмущение, локализованное в точке x_0 , возбуждает два волновых процесса с частотами $\omega_A(x_0)$ и $\omega_A(x)$ соответственно. Здесь x — точка наблюдения. Волновой процесс первого типа, являющийся аналогом псевдo-волн, представляет собой альвеновские колебания, бегущие с локальной альвеновской скоростью $c_A(x_0)$. Присутствие в асимптотике колебаний с частотой $\omega_A(x_0)$ вполне естественно, и, по-видимому, не требует пояснений. Появление волнового процесса второго типа в определенной степени связано с использованием метода преобразования Лапласа. Действительно, при внезапном возникновении возмущения должен возбуждаться весь спектр частот рассматриваемой системы. Однако в точке x возмущения с частотами $\omega \neq \omega_A(x)$ взаимно уничтожают друг друга из-за интерференции.

Для того чтобы стала заметной разность между частотами, отстоящими на $\Delta\omega$, необходимо время $t \geq 1/\Delta\omega$. Поэтому чем больше время t , тем меньше интервал частот $\Delta\omega$, которые дают вклад в асимптотику (9.13). С этим обстоятельством связано степенное затухание амплитуды возмущения.

9.3.3. Большие времена ($t \gg t_s$). В подп. 9.3.2 отмечалось, что частотный интервал $\Delta\omega$, определяющий асимптотику возмущения, с ростом времени сокращается как $1/t$. Когда он сравнивается по порядку величины с $\delta\omega_s \approx 1/t_s$, разрешается тонкая структура возмущения в окрестности точки альвеновского резонанса и проявляется его регулярный характер, связанный с учетом неидеальности плазмы. Как известно, для регулярных функций асимптотика интегралов вида (9.10), (9.12) определя-

ется точками перевала на плоскости комплексного ω . Точки перевала появляются при $t \geq t_s$ и лежат в области таких значений ω , где для быстро меняющихся решений, входящих в функцию Грина, можно использовать асимптотические представления. Их основные слагаемые пропорциональны экспонентам

$$\exp \left\{ \pm \frac{2i}{3} \Lambda^{1/2} N_y^{3/2} [x - x_s(\omega)]^{3/2} \right\},$$

$$\exp \left\{ \pm \frac{2i}{3} \Lambda^{1/2} N_y^{3/2} [x_0 - x_s(\omega)]^{3/2} \right\},$$

$$\Lambda = -n_0(\omega_A^2)'_x / \alpha.$$

Рассмотрим сначала область $x > x_0$. Учтем то обстоятельство, что быстро меняющаяся добавка к решениям $\varphi^{(1,2)}(x_0)$, возникающая в определенных секторах комплексного x_0 , не дает вклада в асимптотику, так как она выпадает из определителей $W_{1,3,4}(x_0)$, $W_{2,3,4}(x_0)$, если в нем присутствует такая же быстро меняющаяся экспонента. В противном случае она «нейтрализуется» экспонентой с другим знаком в показателе. Рассмотрим вклад в асимптотику первого слагаемого в (9.11), пропорционального $\varphi^{(1)}(x)$. Эта функция становится быстро меняющейся в секторе S_3 (см. выше, а также Приложение 4). Соответствующая этой быстро меняющейся экспоненте точка перевала расположена при $\omega_s(x, t) = \omega_A(x) - t^2 \omega'_{A,x} / \Lambda$. Поскольку точка ω_s попадает в нижнюю полуплоскость и с ростом времени смещается по закону t^2 , затухание оказывается более быстрым, чем простое экспоненциальное $\exp(-\gamma t)$, характерное для собственных колебаний.

Аналогичным образом рассчитывается вклад первого слагаемого, пропорционального $\varphi^{(2)}(x)$, и для области $x < x_0$. Как нетрудно показать, вкладами слагаемых, пропорциональных $\varphi^{(3,4)}(x)$ можно пренебречь, так как они пропорциональны $\exp \left[\frac{2i}{3} \Lambda^{1/2} |x - x_0|^{3/2} \right]$. В результате при $t \gg t_s$ получаем

$$\varphi(x, x_0, t) \approx \frac{i}{\pi n_0(\omega_A^2)'_x t} K_0(N_y |x - x_0|) \exp \left(-i\omega_A(x)t + \frac{it^3 \omega'_{A,x}}{3\Lambda} \right).$$

В п. 9.3 считается, что $\omega'_{A,x} < 0$, при этом $\text{Im } \Lambda \propto -\omega'_{A,x} > 0$, и следовательно, как и утверждалось выше, элементарное начальное возмущение затухает со временем.

Выше рассматривалась эволюция возмущений в равновесной плазме. Если плазма неравновесна, например, в ней присутствует пучок высокоэнергичных ионов, то уравнение альвеновских колебаний модифицируется. В нем сочетание $\omega^2 - \omega_A^2(x)$ заменяется на $\omega^2 - \omega_A^2(x)(1 + i\delta)$, где $\delta > 0$. Эта замена приводит к двум следствиям. Во-первых, при достаточно большой проводимости приграничные собственные колебания, рассматривавшиеся в п. 9.2, становятся неустойчивыми [105].

Вторым следствием является неустойчивость несобственных локальных альвеновских колебаний, эволюция которых анализировалась выше. При $\delta > 0$ такие колебания раскачиваются с инкрементом $\approx \omega_A(x)\delta/2$. Однако в неравновесной плазме, как и в равновесной, по прошествии времени $t \geq t_s$ должны вступить в действие эффекты неидеальности плазмы, вызывающие резкое затухание возмущений.

Таким образом, влияние неоднородности плазмы ограничивает коэффициент усиления начальных возмущений, пропорциональный $\exp(\omega_A(x)t_s\delta/2)$ без участия нелинейных эффектов. Источником начальных возмущений могут служить электронные столкновения. В результате в неравновесной неоднородной плазме должен установиться стационарный уровень турбулентных пульсаций. Такая турбулентность рассматривалась в [101].

Глава 4

Резонансное взаимодействие в неоднородных течениях плазмы и жидкости

10. Резонансное взаимодействие в плоскопараллельных течениях обычной жидкости

10.1. Теорема Рэлея. Как отмечено во Введении, теория устойчивости плоскопараллельных течений обычной жидкости предшествовала теории устойчивости плазменных течений и в определенной степени явилась образцом, по которому строилась последняя. Ряд результатов теории устойчивости плоскопараллельных течений обычной жидкости имеет прямые плазменные аналоги. Учитывая эти обстоятельства, выясним вначале какое влияние гидродинамическое резонансное взаимодействие оказывает на колебательные свойства и устойчивость плоскопараллельных течений обычной жидкости.

Основу теории устойчивости таких течений составляет теорема Рэлея, установленная им еще в 1880 г. [110] (см. также, например, [111]). Рэлей рассматривал колебания идеальной жидкости. Однако теорема, носящая его имя, справедлива с некоторыми оговорками (см. ниже) для реальной жидкости, при достаточно малой вязкости — больших числах Рейнольдса. Уравнение движения идеальной жидкости имеет вид

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{\nabla p}{\rho}, \quad (10.1)$$

где p — давление, ρ — плотность жидкости.

Если жидкость несжимаема, то скорость \mathbf{V} должна также удовлетворять уравнению

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = 0.$$

Для двумерных движений (в плоскости XOY) последнее уравнение будет удовлетворено, если $\mathbf{V} = (\partial\psi/\partial y, -\partial\psi/\partial x)$, где ψ — функция тока.

Применяя к (10.1) операцию rot_z и выражая скорость через функцию тока, получаем

$$\frac{d}{dt}\Delta\psi = 0. \quad (10.2)$$

Уравнение (10.2) выражает закон сохранения ротора скорости в идеальной несжимаемой жидкости $\text{rot}\mathbf{V} = \mathbf{z}^0\Delta\psi$.

Линеаризуя (10.2) по малым возмущениям, приводим это уравнение к виду

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + V_0(x)\frac{\partial}{\partial y} \right] \Delta\psi_1 - \frac{d^2V_0}{dx^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial y} = 0. \quad (10.3)$$

Здесь предполагается, что на стационарное течение со скоростью, направленной по OY и меняющейся по OX , наложено малое возмущение, характеризуемое ψ_1 . Выбирая возмущение в виде

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = \psi_1(x) \exp(-i\omega t +iky),$$

окончательно получаем

$$\psi_1'' - k^2\psi_1 + \frac{kV_0''}{\omega - kV_0}\psi_1 = 0. \quad (10.4)$$

Это уравнение иногда называют уравнением Рэлея.

Существует несколько вариантов доказательства теоремы Рэлея. Мы будем следовать [111]. Домножим (10.4) на ψ_1^* и вычтем из полученного результата комплексно-сопряженное выражение:

$$\frac{d}{dx} \left(\psi_1^* \frac{d\psi_1}{dx} - \psi_1 \frac{d\psi_1^*}{dx} \right) = 2i \frac{\text{Im} \omega k V_0}{|\omega - kV_0|^2} |\psi_1|^2. \quad (10.5)$$

Проинтегрируем теперь (10.5) от одной границы потока до другой:

$$W|_{x_1}^{x_2} = k \text{Im} \omega \int_{x_1}^{x_2} |\psi_1|^2 \frac{kV_0''}{|\omega - kV_0|^2} dx. \quad (10.6)$$

В (10.6) введена действительная величина

$$W = \frac{ik}{2} \left(\psi_1 \frac{d\psi_1^*}{dx} - \psi_1^* \frac{d\psi_1}{dx} \right).$$

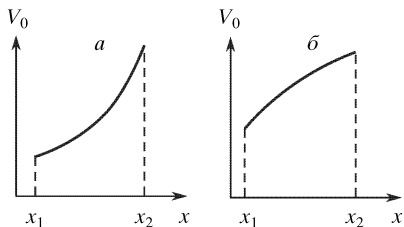


Рис. 10.1. Профили скорости течений без точек перегиба: $a - V_0'' > 0$, $b - V_0'' < 0$; x_1, x_2 — границы течения

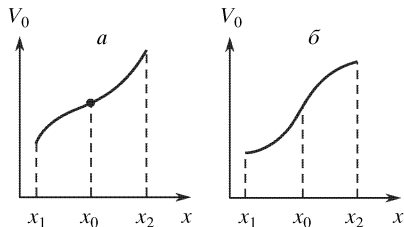


Рис. 10.2. Профили скорости течений с точками перегиба: $a - V_0''' > 0$, $b - V_0''' < 0$; x_0 — точка перегиба

Эта величина определяет так называемое напряжение Рейнольдса в колебаниях (см. ниже)

$$W_R = \rho_0 W = -\rho_0 \operatorname{Re} (V_{x1} V_{y1}^*).$$

На твердых стенках, ограничивающих течение, нормальная компонента скорости $V_{1x} = ik\psi_1$, а вместе с ней и левая часть (10.6) обращаются в нуль. Однако при $\operatorname{Im} \omega \neq 0$ правая часть этого уравнения может стать равной нулю, лишь если величина V_0'' меняет знак в интервале (x_1, x_2) , т.е. профиль скорости течения имеет точку перегиба.

Таким образом, наличие точек перегиба является необходимым условием неустойчивости.

Если же профиль скорости не имеет точек перегиба, то течение устойчиво (теорема Рэлея). Примеры течений обоих типов изображены на рисунках 10.1, 10.2.

Соотношение (10.6) на первый взгляд в равной мере относится как к нарастающим колебаниям ($\operatorname{Im} \omega > 0$), так и к затухающим ($\operatorname{Im} \omega < 0$). Поэтому на его основе следовало бы сделать вывод о том, что в течениях с профилем скорости без точек перегиба не могут существовать ни те, ни другие. Использование же (10.6) для случая нейтральных колебаний ($\operatorname{Im} \omega = 0$) требует пояснений, поскольку знак правой части этого соотношения зависит от того — рассматриваются ли такие колебания как предельный случай нарастающих или затухающих. Сходная неопределенность встречалась в задаче о бесстолкновительном резонансном взаимодействии плазменных колебаний (см. п. 1.3). В этом случае выбор между двумя возможностями производится при учете столкновений, что необходимо для регуляризации задачи. А именно, в п. 1.3 показано, что если не интересоваться тонкими деталями возмущенной функции распределения в

окрестности резонансного значения скорости $V_s = \omega/k$, то для определения физически значимых величин можно использовать бесстолкновительное приближение, дополненное правилом обхода Ландау.

Такой подход эквивалентен рассмотрению нейтральных колебаний как предельного случая нарастающих. Более существенно столкновения влияют на затухающие колебания. Как бы ни была мала частота столкновений их воздействие на вид возмущения функции распределения необходимо учитывать в некотором интервале значений скорости, окружающем точку $V_s = \text{Re}(\omega/k)$.

Колебания плоскопараллельных течений в ряде существенных аспектов сходны с колебаниями плазмы. Так при совпадении в некоторой точке x_s скорости течения с фазовой скоростью колебаний ω/k возникает явление резонанса, на этот раз гидродинамического (см. выше). Резонансная точка является особой точкой уравнения Рэлея — в ней обращается в нуль коэффициент перед старшей (второй) производной. В ее окрестности одно из двух линейно независимых решений уравнения Рэлея имеет вид

$$\psi_1 \approx 1 + \frac{x - x_s}{L} \ln \left(\frac{x - x_s}{L} \right),$$

где $L = \left. \frac{V_0'}{V_0} \right|_{x=x_s}$. Производные этого решения при $x \rightarrow x_s$ неограниченно возрастают, и поэтому на достаточно малом расстоянии от точки x_s приближение идеальной жидкости оказывается непригодным — требуется учет вязкости жидкости, как бы она ни была мала. Линеаризация уравнения Навье–Стокса приводит к уравнению Орра–Зоммерфельда, являющемуся обобщением уравнения Рэлея,

$$-i\chi \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \right)^2 \psi_1 + (\omega - kV_0) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \right)^2 \psi_1 + kV_0'' \psi_1 = 0, \quad (10.7)$$

где χ — коэффициент кинематической вязкости.

Исследование данного уравнения показывает (см. [111,112]), а также Приложение 4, что вязкость жидкости играет ту же роль, что и столкновения в задаче о колебаниях плазмы. А именно, ее учет регуляризует уравнение Рэлея, при этом оказывается, что в случае нейтральных колебаний вязкость существенна лишь в малой окрестности резонансной точки. Если не интересоваться видом решения в этой области, то эффект воздействия вязкости можно учесть в рамках уравнения Рэлея, дополнив его

правилом обхода Ландау, т.е. рассматривая нейтральные колебания как предельный случай нарастающих с $\text{Im } \omega \rightarrow 0$. При этом соотношение (10.6) принимает вид

$$W|_{x_1}^{x_2} = \pi k V_0''(x_s) |V_0'(x_s)|^{-1} |\psi_1(x_s)|^2. \quad (10.8)$$

Данное соотношение препятствует существованию нейтральных колебаний, для которых в пределах течения выполняется условие резонанса ($\min V_0(x) < \omega/k < \max V_0(x)$).

Чтобы проанализировать возможность существования нерезонансных нейтральных колебаний с фазовой скоростью, лежащей вне указанного интервала, введем новую неизвестную функцию $\Psi_1 = \psi_1/(\omega - kV_0)$. При этом уравнение Рэлея принимает вид

$$\frac{d}{dx} (\omega - kV_0)^2 \frac{d\Psi_1}{dx} - (\omega - kV_0)^2 \Psi_1 = 0.$$

Помножив данное уравнение на Ψ_1^* и проинтегрировав по частям, получаем

$$\int_{x_1}^{x_2} (\omega - kV_0)^2 \left(\left| \frac{d\Psi_1}{dx} \right|^2 + k^2 |\Psi_1|^2 \right) dx = 0. \quad (10.9)$$

Это соотношение не может быть удовлетворено в случае нерезонансных колебаний. Если же в какой-то точке условие резонанса выполняется, то интеграл в (10.8) расходится

$$\psi_1(x) \underset{x \rightarrow x_{ss}}{\rightarrow} \text{const}, \quad \Psi_1 \underset{x \rightarrow x_s}{\rightarrow} (x - x_s)^{-1}$$

и само соотношение теряет смысл. Однако резонансный случай был рассмотрен выше с помощью соотношений (10.6), (10.8).

Общий результат анализа может быть сформулирован в виде теоремы Рэлея: в течениях с профилем скорости без точек перегиба отсутствуют как нарастающие, так и нейтральные колебания.

Следует однако отметить, что равенство (10.9) выполняется в вырожденном случае $k \rightarrow 0, \omega/k \rightarrow 0, \Psi_1 \rightarrow \text{const}$, при этом $\psi_1 \propto V_0(x)$. Поскольку в них $V_{1y} \propto \partial V_0/\partial x$, то такие колебания представляют собой смещение жидкости по оси OX . Так как функция $\psi_1(x)$ должна удовлетворять граничным условиям $\psi_1(x_{1,2}) = 0$, вырожденные колебания могут существовать лишь в течениях, невозмущенная скорость которых обращается в нуль

на стенках, как например, в случае пуазейлевского течения. Эти колебания будут проанализированы в дальнейшем.

В случае затухающих колебаний ($\text{Im } \omega < 0$) резонансная (особая) точка располагается в комплексной плоскости ($\text{Im } x_s \neq 0$), при этом сектор комплексного переменного, выходящий из точки x_s , в котором необходимо учитывать вязкость жидкости, как бы ни была она мала, пересекает действительную ось. На соответствующем интервале действительной оси уравнение Рэлея непригодно для описания пространственной структуры колебаний.

По этой же причине соотношение (10.6), являющееся следствием уравнения Рэлея, не может быть использовано для анализа затухающих колебаний.

10.2. Энергия колебаний. Приведенные результаты составляют основу теории устойчивости плоскопараллельных течений. Их можно сравнительно просто интерпретировать, рассмотрев резонансное взаимодействие между колебаниями жидкости и ее основным — невозмущенным течением [12,113,114]. Интерпретацию полезно начать с вывода выражения для энергии рассматриваемых колебаний [12]. При возбуждении колебаний в течении не только возникает осцилляционное движение, но также изменяется его средняя скорость, что требует затрат энергии (или ее отвода). Чтобы рассчитать изменение средней скорости усредним y -компоненту уравнения движения по времени и координате y :

$$\rho_0 \frac{\partial V_0}{\partial t} = -\rho_0 \left(V_{x1}^* \frac{\partial V_{y1}}{\partial x} - V_{x1} \frac{\partial V_{y1}^*}{\partial x} \right) = \frac{\partial W_R}{\partial x}, \quad (10.10)$$

где W_R — напряжение Рейнольдса (см. выше).

С помощью (10.10), и уравнения Рэлея изменение энергии среднего движения может быть представлено в виде

$$\frac{\partial W_0}{\partial t} = \rho V_0 \frac{\partial V_0}{\partial t} = -\rho_0 \int |\psi_1|^2 k^2 V_0 V_0'' \text{Im} \frac{1}{\omega - kV_0} dx. \quad (10.11)$$

Данное выражение, как и уравнение Рэлея, следствием которого оно является, пригодно лишь для анализа нарастающих колебаний с $\text{Im } \omega > 0$. Разумеется, изменение энергии среднего течения не зависит от того, обуславливается ли оно работой внешнего источника или обменом с другими частями течения, что имеет место в случае неустойчивости. Поэтому соотношение

(10.11), хотя и предполагает взаимодействие с внешним фактором, тем не менее позволяет найти инвариантное выражение для энергии.

При рассмотрении нарастающих колебаний разделим течение на две области: резонансную, в которой $|\omega - kV_0(x)| \leq \gamma$, и нерезонансную, в которой $|\omega - kV_0(x)| \gg \gamma$. Граница между этими областями довольно размыта. Данная нечеткость характерна для теории резонансного взаимодействия. Однако имеются ситуации, когда она не препятствует расчету физически значимых величин (см. ниже).

Для нерезонансной части справедливо соотношение

$$\operatorname{Im} \frac{1}{\omega - kV_0} |\psi_1|^2 \approx \frac{\gamma}{(\omega - kV_0)^2} |\psi_1|^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{(\omega - kV_0)^2} \frac{d}{dt} |\psi_1|^2,$$

используя которое, находим изменение энергии нерезонансной части течения

$$\frac{d\widetilde{W}_{0,nr}}{dt} = \frac{\rho_0}{2} \int \frac{k^2 V_0 V_0''}{(\omega - kV_0)^2} \frac{d}{dt} |\psi_1|^2 dx.$$

Поскольку возбуждение колебаний невозможно без изменения средней скорости течения, то величину

$$\widetilde{W}_{0,nr} = \frac{\rho_0}{2} \int \frac{k^2 V_0 V_0''}{(\omega - kV_0)^2} |\psi_1|^2 dx$$

следует включить в энергию колебаний. Другая ее часть

$$W_1 = \frac{\rho_0}{2} \int \mathbf{V}_1^2 dx = \frac{\rho_0}{2} \int |\nabla \psi_1|^2 dx. \quad (10.12)$$

представляет собой собственно энергию колебательного движения.

Интегрируя первое слагаемое в (10.12) по частям и используя уравнение Рэлея, получаем

$$W_1 = \frac{\rho_0}{2} \int |\psi_1|^2 \frac{kV_0''}{\omega - kV_0} dx.$$

Полная колебательная энергия дается выражением

$$W = \widetilde{W}_{0,nrs} + W_1 = \frac{\rho_0}{2} \int |\psi_1|^2 \frac{\omega k V_0''}{(\omega - kV_0)^2} dx. \quad (10.13)$$

Данная величина не обязательно положительна. Ее знак зависит, в частности, от знака частоты колебаний (знака фазовой скорости по $OY - \omega/k$), который может меняться при переходе

из одной системы отсчета в другую, движущуюся вдоль OY . В неоднородных течениях выбор системы отсчета заранее не очевиден и требует обсуждения (см. ниже). Если профиль скорости течения имеет точку перегиба, то знак энергии зависит от распределения $|\psi_1|$ и профиля V_0'' .

В собственных колебаниях течений полная энергия сохраняется, и изменения колебательной энергии обусловлены взаимодействием колебаний с резонансным слоем. Изменение энергии последнего может быть получено с помощью (10.11), если в резонансной области положить $\text{Im} \frac{1}{\omega - kV_0} = -\pi\delta(\omega - kV_0)$:

$$\frac{\partial \tilde{W}_{0,r}}{\partial t} = \pi\rho_0 \frac{V''(x_s)}{|V_0'(x_s)|} |\psi_1(x_s)|^2. \quad (10.14)$$

Инкремент (декремент) собственных колебаний может быть рассчитан с помощью соотношения

$$\gamma = -\dot{\tilde{W}}_{0,r}/2W. \quad (10.15)$$

10.3. Интерпретация теоремы Рэлея. Постараемся теперь найти профили скорости течений, для которых разделение на резонансную и нерезонансную части имело бы смысл. С этой целью используем аналогию с колебаниями плазмы. При анализе плазменных колебаний представление о резонансной раскачке (затухании) колебаний обычно используется в том случае, когда собственные колебания плазмы (коллективная степень свободы) создаются основной частью плазмы, а в резонанс с колебаниями попадает малая доля заряженных частиц. Такое соотношение между резонансной и нерезонансной частями функции распределения заряженных частиц характерно, например, для слабой пучковой неустойчивости.

В противоположность этому в случае так называемой двухпучковой неустойчивости все частицы на равных правах участвуют как в поддержании собственных колебаний, так и в резонансном взаимодействии.

В течениях жидкости, как следует из уравнения Рэлея, колебания поддерживаются той частью течения, в которой велико значение $|V_0''|$. Данная область становится четко определенной в течениях с кусочно-линейным профилем скорости, в которых $V_0'' = 0$, всюду кроме одной точки:

$$V_0''(x) = \Delta V_0'(x_c)\delta(x - x_c),$$

где $\Delta V_0'$ — скачок первой производной скорости.

При наличии излома на профиле скорости уравнение Рэлея имеет вид уравнения Шредингера с предельно узкой одномерной ямой.

Если границы течения расположены достаточно далеко от точки излома x_c , то решение (10.4), локализованное в ее окрестности, дается простым выражением

$$\psi_1(x) \approx \exp(-k|x - x_c|).$$

При этом условие сопряжения производной в точке x_c , определяет частоту собственных колебаний

$$\omega = kV_0(x_c) + \frac{1}{2}\Delta V_0'(x_c).$$

Для рассматриваемых течений выбор подходящей системы отсчета не представляет труда. А именно, естественно использовать систему, в которой слой жидкости, поддерживающий колебания, покоится ($V_0(x_c) = 0$). Аналогичным образом при рассмотрении плазменных колебаний обычно используется система отсчета, в которой в среднем покоится основная масса заряженных частиц, создающих коллективную степень свободы. При таком выборе

$$\omega = \frac{1}{2}\Delta V_0'(x_c)$$

и энергия колебаний оказывается положительной при любом знаке $\Delta V_0'(x_c)$ (см. (10.13)).

Теперь предположим, что в резонансной точке, где фазовая скорость колебаний $\omega/k = \Delta V_0'(x_c)/2k$ совпадает со скоростью течения $V_0(x_s)$ вторая производная скорости имеет малое, но отличное от нуля значение. Как следует из (10.13)–(10.15), колебания будут нарастать, если величины $\Delta V_0'(x_c)$ и $V_0''(x_s)$ имеют разные знаки. Поскольку скачок первой производной соответствует предельной локализации второй, то условие неустойчивости совпадает с необходимым условием неустойчивости Рэлея. Инкремент неустойчивости может быть получен как с помощью (10.15), так и с использованием уравнения Рэлея. В последнем случае вклад резонансной точки следует учесть по методу последовательных приближений. Оба способа дают один и тот же результат

$$\gamma = -\frac{1}{4k} \frac{V_0''(x_s)\Delta V_0'(x_c)}{|V_0'(x_s)|}.$$

Теорема Рэлея в рассматриваемом течении с изломом на профиле скорости имеет наглядную интерпретацию. Как известно, резонансное взаимодействие стремится выровнять скорость течения в окрестности резонансной точки, сделав ее равной фазовой скорости колебаний. (Эта тенденция проявляется особенно отчетливо для колебаний конечной амплитуды, при анализе которых необходимо учитывать нелинейные эффекты.) Поэтому слои жидкости, обгоняющие колебания, замедляются, отдавая энергию колебаниям, а слои, отстающие от колебаний, ускоряются. Сравним число частиц (массу жидкости), которые отдают энергию колебаниям с числом частиц, получающих ее от колебаний. В неоднородных течениях распределение по скоростям

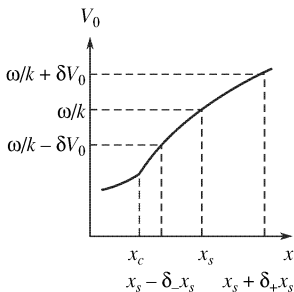


Рис. 10.3. К устойчивости течений с изломом на профиле скорости: x_c — точка излома, x_s — резонансная точка, $\delta_+ x_s$ ($\delta_- x_s$) — часть резонансной зоны, в которой $V_0 > \omega/k$ ($V_0 < \omega/k$), δV_s — изменение скорости течения в пределах резонансной зоны

«развернуто» в обычном пространстве, причем в случае однородной жидкости роль функции распределения играет величина $f_0(V_0) = dx/dV_0$ (см., например, [12, 113–117]). Выражение для производной df_0/dV_0 можно представить в виде

$$\frac{df_0}{dV_0} = - \left(\frac{dV_0}{dx} \right)^{-3} \frac{d^2 V_0}{dx^2}.$$

Поскольку мы считаем, что $V'(x_s) > 0$, то производная df_0/dV_0 положительна, если $V_0''(x_s) < 0$. Необходимость выполнения последнего условия ясно видна из рис. 10.3. На нем по отдельности изображены части резонансной зоны, в которых расположены слои жидкости, обгоняющие колебания и отстающие от колебаний. Их размеры равны $\delta_+ x_s$ и

$\delta_- x_s$, соответственно. Таким образом, если $V_0''(x_c) > 0$, то течение неустойчиво при $V_0''(x_s) < 0$. Следовательно, в соответствии с теоремой Рэлея величина $V_0''(x)$ должна менять знак в интервале (x_c, x_s) .

Интерпретация условий устойчивости колебаний на основе сопоставления числа резонансных частиц, обгоняющих волну и отстающих от нее, привычна для теории резонансного взаимодействия. Однако утверждение, что частицы, обгоняющие волну, отдают энергию колебаниям, а отстающие получают ее от колебаний, нельзя понимать буквально. Действительно, в случае колебаний бесконечно малой амплитуды, которые в основном

нас интересуют, изменение энергии частиц с $V_0 = \omega/k$ вне зависимости от точного значения скорости определяется локальным значением фазы волны. При этом высказанное выше утверждение выполняется лишь в среднем для ансамбля. В п. 1.3 его справедливость была продемонстрирована для плазменных колебаний.

Покажем, что оно остается верным и для колебаний течений обычной жидкости. Предположим, что в жидкости возникло возмущение давления $p_1(y, t) = p_1 \cos \Phi$, где $\Phi = ky - \omega t$. В резонансном слое фаза волны на траектории «частиц жидкости» постоянна, поэтому их скорость меняется по закону $V_{1y} = a_1 t$, где $a_1 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{kp_1}{\rho_0} \sin \Phi$. Это изменение сказывается на положении резонансной точки. Из условия $V_0(x_s) + V_{1y} = \omega/k$ получаем

$$x_s = x_{s0} - a_1 t / V_0',$$

где $x_{s0} = x_s$ при $p_1 = 0$. Полагая для определенности $V_0'(x) > 0$, находим, что в областях, где жидкость ускоряется ($\partial p_1 / \partial y < 0$), резонансная точка сдвигается по оси OX влево, а в областях замедления — вправо.

Ввиду того, что y -компонента скорости жидкости зависит от координаты x , размер резонансной зоны δx_s при этом изменится. Используя условие

$$\frac{\omega}{k} - \delta V_s < V_0(x) + V_{1y}(x) < \frac{\omega}{k} + \delta V_s,$$

для δx_s получаем следующее выражение:

$$\delta x_s \approx 2 \frac{\delta V_s}{V_0'(x_s)} \approx 2 \frac{\delta V_s}{V_0'(x_{s0})} \left[1 - \left(\frac{1}{V_0'} \right)' a_1 t \right].$$

Здесь δV_s — изменение скорости течения в пределах резонансной зоны. Значение δV_s определяется вязкостью жидкости или в случае нарастающих колебаний их инкрементом

$$\delta V_s \approx \max \left[\operatorname{Im} \frac{\omega}{k}, |V_0'|^{2/3} \left(\frac{\chi}{k} \right)^{1/3} \right].$$

Основываясь на выражении для δx_s можно сделать вывод, что при $V_0' > 0$ колебания должны нарастать, если в точке резонанса $V_0'' < 0$, и затухать, если $V_0'' > 0$. Действительно, при $V_0''(x_s) < 0$ размер резонансной зоны в области, где жидкость тормозится ($a_1 = kp_1/\rho_0 \sin \Phi < 0$), оказывается большим, чем в областях, где она ускоряется ($a_1 > 0$) (рис. 10.4).

Из выражения для силы, с которой колебания действуют на резонансные частицы $F = - \langle \delta x_s \partial p_1 / \partial y \rangle_y$, следует, что резонансный слой должен в среднем тормозиться колебаниями, отдавая им свой импульс и энергию. При $V_0'' > 0$ имеем обратное соотношение между размерами резонансных зон в областях ускорения и замедления, поэтому колебания должны затухать.

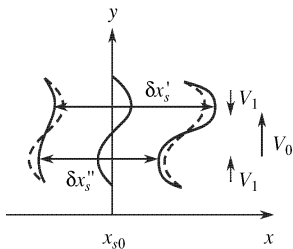


Рис. 10.4. Определение размера резонансной зоны при наличии возмущения: $\delta x_s'$ — размер резонансной зоны в области замедления, $\delta x_s''$ — в области ускорения, x_{s0} — резонансная точка в отсутствие возмущения, предполагается, что $V_0'' < 0$

колебаний $V_0'''(x_s) < 0$, полученное нами, вполне согласуется с условием рэлеевской неустойчивости.

В соответствии со сказанным выше, понятия замедления и ускорения, равно как опережения и отставания, разумно использовать в системе отсчета, где часть течения, которая поддерживает колебания, в среднем покоится. В этой области величина $V_0'' > 0$ должна быть положительна, чтобы выполнялось условие $\omega/k > 0$, принятое выше. Поэтому условие раскачки

10.4. Неустойчивость пуазейлевского течения.

Течения, профиль скорости которых не имеет точек перегиба, устойчивы лишь в рамках приближения идеальной жидкости. Учет вязкости может дестабилизировать такие течения, если они имеют нейтральные собственные колебания с отрицательной энергией. Такова на наш взгляд природа неустойчивости пуазейлевского течения [12,118]. Пуазейлевское течение — это течение с параболическим профилем скорости между плоскими стенками (рис. 10.5). Поскольку скорость пуазейлевского течения обращается в нуль на стенках, в нем должны существовать вырожденные нейтральные колебания с $k \rightarrow 0, \omega/k \rightarrow 0$, см. выше. Чтобы облегчить расчет энергии колебаний заменим пуазейлевский профиль эквивалентным профилем с изломом $V_0(x) = V_0(1 - |x|/a)$. Решение уравнения Рэлея, удовлетворяющее граничным условиям $\psi_1(\pm a) = 0$, имеет вид

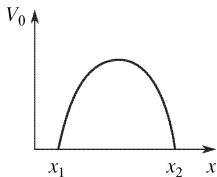


Рис. 10.5. Профиль скорости пуазейлевского течения

$$\psi_1 = \text{sh}[k(a - |x|)].$$

Частота соответствующих колебаний равна

$$\omega = kV_0 \left[1 - \frac{\text{th}(ka)}{ka} \right].$$

Как и следовало ожидать, при $k \rightarrow 0$ имеем $\psi_1(x) \rightarrow CV_0(x)$, $\omega \rightarrow 0$. Энергия рассматриваемых колебаний отрицательна

$$W = k\rho_0[\text{th}(ka) - ka]|\psi_1(0)|^2.$$

Диссипация энергии колебаний под действием вязкости должна приводить к их раскачке. Влияние вязкости особенно существенно в двух областях: вблизи стенки, поскольку при учете вязкости должна обращаться в нуль тангенциальная компонента скорости $V_{1y} = \partial\psi_1/\partial x$, и как отмечалось выше, в окрестности резонансной точки, если $V_0''(x_s) \neq 0$. Следует отметить, что в рассматриваемом случае ($\omega/k \rightarrow 0$) резонансный и пристеночный слои сливаются, что усиливает действие вязкости.

Интересно выяснить, каким будет характер неустойчивости пуазейлевского течения в системе отсчета, в которой слой жидкости, поддерживающий колебания (точка излома на профиле скорости), покоится, а стенки обгоняют течение $V_0 \geq V_0(x)$. В этой системе частота рассматриваемых колебаний дается выражением $\omega = \frac{V_0}{a} \text{th}(ka)$, а энергия колебаний оказывается положительной

$$W = \rho_0 k \text{th}(ka) |\psi_1(0)|^2.$$

При $k \rightarrow 0$ резонанс осуществляется вблизи стенки $\omega/k \rightarrow 0$. Под действием вязкости стенка увлекает за собой резонансный слой, а последний передает энергию и импульс колебаниям. Таким образом, в данном случае резонансный слой играет роль посредника между внешним агентом (стенка) и колебаниями.

10.5. Эволюция начальных возмущений. В заключение остановимся вкратце на проблеме эволюции начальных возмущений в течениях с профилем скорости без точек перегиба, в которых отсутствуют как нарастающие, так и нейтральные колебания. Данная ситуация сходна с рассмотренным в п. 9.3. случаем альвеновских колебаний неоднородной плазмы, для которых выполняется аналог теоремы Рэлея. В обоих случаях устранение незатухающих собственных колебаний обусловлено сингулярным характером упрощенных «идеальных» волновых уравнений. В то же время учет сингулярности в задаче об эволюции

начальных возмущений выявляет новые объекты — псевдоволны. В неоднородных течениях жидкости они описывают колебания, вызываемые струйками (слоями), в которых возмущен ротор скорости $\text{rot}_z \mathbf{V} = \delta(x-x_0) \exp[iky - ikV_0(x)t]$. В силу сходства уравнения альвеновских колебаний с уравнением Оппа–Зоммерфельда весьма сходными оказываются и результаты анализа эволюции начальных возмущений в этих двух задачах. А именно, в течениях жидкости плавные начальные возмущения с фиксированным значением волнового числа k по координате y при малых временах $t \ll \chi^{-1/3}(kV'_0)^{-2/3}$ затухают по степенному закону $\psi \propto 1/t^2$ [8,9]. Затухание вызывается расфазировкой псевдоволн, сдвигающихся друг относительно друга из-за неоднородности течения. При $t \geq \chi^{-1/3}(kV'_0)^{-2/3}$ диффузия ротора скорости, вызываемая вязкостью жидкости, разрушает псевдоволны. В результате закон затухания становится очень резким: $\psi \propto \exp[-1/3\chi(kV'_0)^2 t^3]$ [4,12] (сравнить с затуханием альвеновских колебаний неоднородной плазмы, см. §9).

11. Желобковые колебания неоднородно движущейся плазмы

11.1. Желобковые колебания газа заряженных частиц одного сорта. Простейшая среда, колебания которой в наибольшей степени сходны с колебаниями плоскопараллельных течений обычной жидкости, — газ заряженных частиц одного сорта в магнитном поле. (В последнее время термин «газ заряженных частиц» часто заменяется на «заряженная плазма»). Устойчивость такой среды исследовалась в ряде задач, представляющих практический интерес. Так электронная компонента плазмы обнажается в щелях магнитоэлектростатических ловушек, и ее устойчивость существенно влияет на удержание плазмы в таких системах. Газ заряженных частиц одного сорта в магнитном поле является рабочей средой магнетронов и некоторых других радиотехнических приборов.

Если магнитное поле достаточно велико, так что ларморовский радиус заряженных частиц мал по сравнению с размером системы, то частицы дрейфуют в скрещенных полях (внешнем магнитном и электрическом, создаваемым собственным зарядом) со скоростью $\mathbf{V} = \frac{c}{B^2} [\mathbf{B} \nabla \varphi]$ (здесь φ — электрический потенциал).

Скорость дрейфового движения направлена поперек магнитного поля, и поэтому с ним наиболее интенсивно взаимодейству-

ют колебания, волновой вектор которых также перпендикулярен магнитному полю. В таких колебаниях возмущения плотности заряженных частиц образуют как бы желобки, вытянутые вдоль магнитного поля. Соответственно сами колебания называются желобковыми. Анализ устойчивости желобковых колебаний существенно облегчается аналогией с колебаниями течений идеальной жидкости. Данный подход был предложен в [119] и в настоящее время является общепринятым (см. например [116]).

Рассмотрим газ заряженных частиц (для определенности электронный), помещенный в однородное магнитное поле, направленное по OZ . Будем считать, что плотность электронов не зависит от координаты z . В такой системе электрическое поле колебаний, так же как и начальное электрическое поле $\mathbf{E}_0 = -\nabla\varphi_0$, перпендикулярно магнитному, и выражение $\mathbf{V} = \frac{c}{B^2} [\mathbf{B}\nabla\varphi]$ можно использовать для полной скорости $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1$. Дрейфовое движение сходно с движением идеальной несжимаемой жидкости, рассмотренным в §10, а именно, оно двумерно ($\mathbf{V} \perp \mathbf{B}$) и в случае однородного магнитного поля — несжимаемо, причем роль функции тока ψ играет величина $c\varphi/B$.

В силу условия несжимаемости уравнение непрерывности для электронной плотности приводится к виду $dn/dt = 0$. Используя уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi en,$$

запишем уравнение непрерывности, которое в рассматриваемом случае выражает закон сохранения заряда, в виде

$$\frac{1}{4\pi e} \frac{d}{dt} \Delta\varphi = 0, \quad (11.1)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{c}{B^2}\right) ([\mathbf{B}\nabla\varphi] \nabla).$$

Нетрудно видеть, что уравнение (11.1) аналогично (10.2) и, как и последнее, означает, что сохраняется ротор скорости

$$\text{rot}_z \mathbf{V} = \left(\frac{c}{B}\right) \Delta\varphi = \frac{4\pi enc}{B}.$$

Будем считать, что в начальном состоянии система однородна по OY ($n_0(\mathbf{r}) = n_0(x)$, $\varphi_0(\mathbf{r}) = \varphi_0(x)$). Соответственно воз-

мушение потенциала в желобковых колебаниях выберем в виде $\varphi_1(\mathbf{r}, t) = \varphi_1(x) \exp(-i\omega t +iky)$. Линеаризуя (2.1) по возмущению φ_1 , получаем уравнение, по виду совпадающее с уравнением Рэлея:

$$\varphi_1'' - k^2\varphi_1 + \frac{V_0''}{\omega/k - V_0}\varphi_1 = 0, \quad (11.2)$$

где $V_0(x) = c\varphi_0'(x)/B$ — скорость дрейфа электронов, направленная по OY .

В силу отмеченной выше аналогии все результаты, полученные при исследовании колебаний плоскопараллельных течений идеальной несжимаемой жидкости, могут быть перенесены на случай желобковых колебаний газа заряженных частиц. В частности, в соответствии с теоремой Рэлея желобковые колебания устойчивы, если профиль скорости дрейфа $V_0(x)$ не имеет точек перегиба. Из уравнения Пуассона следует, что точки перегиба на профиле скорости экстремальны для плотности заряженных частиц $V_0'' = c\varphi_0'''/B = 4\pi e c n_0'/B$. Поэтому в рассматриваемом случае аналог теоремы Рэлея можно сформулировать следующим образом: желобковые колебания газа заряженных частиц устойчивы, если плотность заряженных частиц является монотонной функцией координаты x .

При доказательстве теоремы Рэлея существенно использовалось граничное условие $\psi_1(x_{1,2}) = 0$. Оно означает, что течение ограничено твердыми стенками, на которых нормальная компонента скорости обращается в нуль $V_{1x} = \partial\psi_1/\partial y = ik\psi_1$. В случае желобковых колебаний условие $\varphi_1 = 0$ следует использовать, если слой ограничен идеально проводящими пластинами.

Согласно аналогу теоремы Рэлея в газе заряженных частиц с монотонным профилем плотности должны отсутствовать не только нарастающие, но и нейтральные колебания. Анализ нейтральных колебаний должен учитывать возможность резонанса с движением заряженных частиц, которому соответствует особенность уравнения (11.2) при действительных значениях координаты x .

В случае обычной жидкости аналогичное уравнение регуляризовалось посредством учета вязкости. Вязкость газа заряженных частиц в практически интересных случаях ничтожно мала, более существенны эффекты конечного ларморовского радиуса заряженных частиц. Влияние конечного ларморовского радиуса на плазменные колебания весьма многообразно (см., например, [116]).

Для регуляризации уравнения желобковых колебаний достаточно учесть, как под действием эффектов конечного ларморовского радиуса меняется скорость их начального невозмущенного колебаниями дрейфа в скрещенных полях. Для низкочастотных желобковых колебаний реальное значение имеет скорость дрейфа, усредненная по ларморовскому вращению $\langle V_0(x) \rangle$. Считая, что характерный масштаб изменения невозмущенного потенциала велик по сравнению с ларморовским радиусом, с точностью до членов порядка $(\rho_e/L)^2$ получаем

$$\langle V_0 \rangle = \frac{c}{B} \left. \frac{d\varphi_0}{dx} \right|_{x=x_e}, \text{ где } x_e \text{ — координата центра ларморовской окружности,}$$

L — характерный пространственный масштаб. Текущая координата электрона x связана с x_e соотношением $x = x_e - \rho_e \cos \theta_e$, где θ_e — фаза ларморовского вращения, с которой электрон приходит в точку x (рис. 11.1).

Из-за конечности ларморовского радиуса в одной и той же точке могут находиться частицы, скорости дрейфа которых различаются на величину равную примерно $\frac{c}{B} \rho_e k < V'_{0,x} \rangle$. В результате резонанс размывается на область размером ρ_e , что естественно, ведет к регуляризации уравнения желобковых колебаний [12,119]

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} - k^2 \varphi_1 - i\pi W(\xi_{eT}) \frac{\langle V''_{0,xx} \rangle}{\rho_{eT} \langle V'_{0,x} \rangle} \varphi_1 = 0,$$

где W — интеграл вероятности от комплексного аргумента, $\xi_{eT} = (\omega - k \langle V_0 \rangle) / (k \langle V'_{0,x} \rangle \rho_{eT})$, $\rho_{eT} = v_{Te} / \omega_e$ — средний ларморовский радиус электронов, распределение электронов по скоростям предполагается максвелловским.

Модифицированное волновое уравнение — результат кинетического рассмотрения, причем выражение для возмущения функции распределения в резонансной области скоростей невозмущенного дрейфа $\langle V_0 \rangle \approx \omega/k$ получено с использованием правила обхода Ландау.

Поэтому вполне естественно, что на плоскости комплексного переменного x сектор, выходящий из резонансной точки, в котором необходимо учитывать мелкомасштабные эффекты ко-

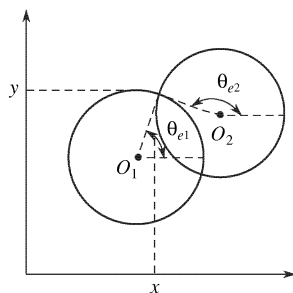


Рис. 11.1. К определению средней скорости дрейфа в скрещенных полях: $O_{1,2}$ — центры ларморовских окружностей, $\theta_{e;1,2}$ — значения фазы ларморовского вращения в точке пересечения

нечного ларморовского радиуса, ориентирован в соответствии с правилом обхода Ландау — при $d\langle V_0 \rangle / dx > 0$ он располагается над резонансной точкой — в области $\pi/4 < \arg x < 3\pi/4$ (рис. 11.2). Вне этой области модифицированное волновое уравнение сводится к упрощенному «идеальному» уравнению (11.2).

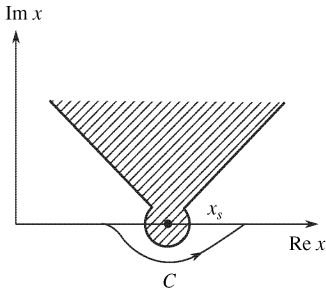


Рис. 11.2. Плоскость комплексного переменного x для уравнения желобковых колебаний газа заряженных частиц при учете эффектов конечного ларморовского радиуса: область, в которой необходимо учитывать эти эффекты, заштрихована; x_s — резонансная точка; считается, что $\text{Im } \omega = 0$; C — контур обхода резонансной точки по Ландау

Доказательство теоремы Рэля (см. §10) основывалось на использовании правила обхода Ландау. Если скорость движения меняется немонотонно, то в окрестности экстремума скорости могут существовать две близко расположенные резонансные точки. В соответствии с правилом обхода Ландау их следует обходить в комплексной плоскости с разных сторон — одну сверху, другую снизу, проходя при этом между ними.

Аналогичная ситуация имеет место для циклотронных колебаний в неоднородном магнитном поле (см. рис. 7.3), альвеновских колебаний в плазме с немонотонным профилем альвеновской скорости и т.д. В случае желобковых колебаний, когда резонансные точки сближаются на расстояние, сравнимое с ларморовским радиусом, приходится рассматривать решение в области, где упрощенное «идеальное» уравнение (11.2) становится несправедливым. Соответственно, может оказаться несправедливым и аналог теоремы Рэля, полученный на основе анализа данного уравнения.

Возможность неустойчивости колебаний с $\omega \approx kV_0(x_m)$, где x_m — точка экстремума скорости, отмечалась еще в [119]. Такая неустойчивость исследовалась в [140, 141]. В [140] рассматривалась временная эволюция начальных возмущений, описываемых «идеальным» волновым уравнением. Был обнаружен их степенной рост, пропорциональный \sqrt{t} . В [141] анализировались собственные колебания. Инкремент неустойчивости оказался пропорционален малому параметру $(\rho_j/L)^{4/3}$.

Реальные системы характеризуются чаще не плоской, а аксиальной симметрией. В таких системах плотность заряженных

частиц зависит от радиуса, электрическое поле радиально, магнитное — направлено вдоль оси симметрии, заряженные частицы дрейфуют по азимуту с угловой скоростью $\omega_0(r) = \frac{1}{r} \frac{c}{B} \frac{d\varphi_0}{dr}$, а желобковые возмущения представляют собой волны, бегущие по азимуту $\varphi_1(\mathbf{r}, t) = \varphi_1(r) \exp(-i\omega t + im\theta)$ (m — азимутальное волновое число). В этом случае линеаризация уравнения (11.1) дает

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\varphi_1}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \varphi_1 - \frac{4}{\omega_0(r) - \omega/m} \frac{d^2 [r^2 \omega_0(r)]}{d(r^2)^2} \varphi_1 = 0. \quad (11.3)$$

Из (11.3) следует, что в аксиально симметричном случае величина $d^2 V_0 / dx^2$ заменяется на $d^2 [r^2 \omega_0(r)] / d(r^2)^2$. Последнее выражение в соответствии с уравнением Пуассона равно $\frac{4\pi e c}{B} \frac{1}{r} \frac{dn_0}{dr}$. Поэтому, повторяя рассмотрение, проведенное в п. 10.1, приходим к заключению, что в аксиально симметричном случае желобковые колебания устойчивы, если плотность заряженных частиц меняется по радиусу монотонно. Пример устойчивого заряженных частиц приведен на рис. 11.3.

Условие устойчивости Рэля можно также трактовать как условие на ротор скорости невозмущенного движения. Действительно, учитывая соотношение

$$\text{rot}_z \mathbf{V}_0 = 2 \frac{d(r^2 \omega_0)}{dr^2},$$

приходим к выводу, что течение устойчиво, если ротор скорости меняется по радиусу монотонно.

В п. 10.4 было показано, что при выполнении условия устойчивости Рэля в течениях с профилем скорости типа пуазейлевского возможны вырожденные нейтральные колебания. Сходные нейтральные колебания имеются и в газе заряженных частиц в магнитном поле. Для их выявления введем в (2.2) новую неизвестную функцию $\tilde{\varphi}_1 = \frac{1}{r(\omega - m\omega_0)} \varphi_1$:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r^2 (\omega - m\omega_0)^2 \frac{d\tilde{\varphi}_1}{dr} \right] + (1 - m^2) (\omega - m\omega_0)^2 \tilde{\varphi}_1 = 0. \quad (11.4)$$

При $m = 1$ решением уравнения (11.4) является $\tilde{\varphi}_1 = \text{const}$, т.е. $\varphi_1(r) = \text{const } r[\omega - m\omega_0(r)]$. Последнее выражение удовле-

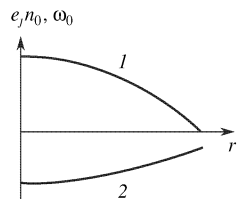


Рис. 11.3. Устойчивое распределение плотности заряженных частиц: 1 — распределение плотности, 2 — распределение скорости вращения

творяет граничному условию $\varphi_1(r_1) = 0$, если $\omega = \omega_0(r_1)$, т.е. резонансная точка совпадает с граничной.

В обоих средах существованию нейтральных колебаний препятствует резонансное взаимодействие между колебаниями и движущейся средой. Его эффективность зависит от величины d^2V_0/dx^2 . Для цилиндрического столба плазмы данная величина заменяется на

$$\frac{d^2 [r^2\omega_0(r)]}{d(r^2)^2} = \frac{4\pi\epsilon c}{B} \frac{1}{r} \frac{dn_0}{dr}.$$

Если частота желобковых колебаний такова, что градиент плотности заряженных частиц в точке резонанса равен нулю, то колебания с таким значением частоты становятся возможными. Так, предположим, что распределение плотности заряженных частиц по радиусу имеет вид ступеньки

$$\omega_{pe}(r) = \begin{cases} \omega_{pe} & \text{при } 0 < r < a, \\ 0 & \text{при } a < r < b, \end{cases}$$

при этом

$$\omega_0(r) = \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_e} \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < r < a, \\ (\frac{r}{a})^2 & \text{при } a < r < b. \end{cases}$$

Решением уравнения (2.3) при таком распределении плотности заряженных частиц являются степенные функции как в области $0 < r < a$, так и в области $a < r < b$. Несложный анализ показывает, что в этом случае существуют нейтральные колебания с частотой

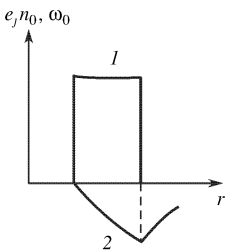
$$\omega = \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_e} \left[1 - m - \left(\frac{a}{b}\right)^{2m} \right].$$

Мнимая часть частоты равна нулю, поскольку для таких колебаний условие резонанса выполняется в вакуумном промежутке $a < r < b$.

В соответствии с теоремой Рэлея газ заряженных частиц может быть неустойчивым, если распределение плотности заряженных частиц по радиусу является немонотонным. Простейший случай такой неустойчивости —

Рис. 11.4. Профиль плотности заряженных частиц, при котором развивается диокотронная неустойчивость: 1 — распределение плотности, 2 — распределение скорости вращения

неустойчивость ступенчатого профиля плотности (рис. 11.4). Данная неустойчивость называется диокотронной. В случае,



изображенном на рис. 11.4, зависимость $\omega_0(r)$ дается выражением

$$\omega_0(r) = \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega_e} \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < r < a_1, \\ 1 - \left(\frac{a_1}{r}\right)^2 & \text{при } a_1 < r < a_2, \\ \left(\frac{a_2}{r}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{r}\right)^2 & \text{при } a_2 < r. \end{cases}$$

Для такой зависимости $\omega_0(r)$ «точка перегиба», в которой

$$\frac{d^2 [r^2 \omega_0(r)]}{d(r^2)^2} = 0,$$

как бы растянута на весь интервал (a_1, a_2) .

11.2. Желобковые колебания разреженной нескомпенсированной плазмы. Желобковые колебания играют важную роль в динамике высокотемпературной — термоядерной плазмы, которая обычно удерживается с помощью магнитного поля. Во многих системах, предназначенных для изучения термоядерного синтеза, плазма имеет вид шнура, вытянутого вдоль силовых линий магнитного поля. Желобковые колебания плазменного шнура неустойчивы, если напряженность магнитного поля уменьшается с удалением от центра шнура. Неустойчивость желобковых колебаний (желобковая неустойчивость) приводит к быстрому развалу плазмы. Для борьбы с ней приходится существенно усложнять геометрию силовых линий магнитного поля. Вместе с тем эксперименты на установках ОГРА-1 [5] и «Алиса» [6] показали, что при сравнительно низкой плотности плазмы можно существенно улучшить ее устойчивость, если привести плазменный шнур во вращение вокруг оси. Вращение плазмы в этих экспериментах вызывалось дрейфом в скрещенных полях: аксиальном магнитном и радиальным электрическом, возникающим из-за раскомпенсации плазмы. В экспериментах [5,6] раскомпенсация создавалась в результате подачи электрического потенциала на торцы системы. Возможно, что стабилизация вызывалась интересующим нас явлением резонансного взаимодействия желобковых колебаний плазмы с ее вращением.

В экспериментах [5,6], как и во многих экспериментах первого этапа термоядерных исследований плазма, была довольно разреженной (дебаевский радиус превышал ларморовский). Желобковые колебания такой плазмы имеют низкую частоту, и при их анализе можно пренебречь инерцией заряженных частиц,

считая, как и в п. 11.1, что возмущения потенциала вызывают только дрейф в скрещенных полях. В то же время для учета влияния неоднородности магнитного поля, являющейся «движущей силой» желобковой неустойчивости, необходимо включить в рассмотрение дрейф заряженных частиц под действием неоднородности магнитного поля

$$\mathbf{V}_j = \frac{c}{B^2} [\mathbf{E}\mathbf{B}] + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} e_j \frac{v_{Tj}^2}{\omega_j B^2} [\mathbf{B}\nabla B]. \quad (11.5)$$

Здесь скорость хаотического движения заряженных частиц считается направленной поперек магнитного поля. Это упрощение хорошо согласуется с условиями экспериментов [5,6], в которых ионная компонента плазмы создавалась инжекцией поперек магнитного поля быстрых нейтралов, а температура электронов была незначительна.

Разреженная плазма не возмущает магнитное поле, и поэтому дрейф под действием неоднородности магнитного поля необходимо учитывать лишь в выражении для невозмущенной скорости. При этих упрощающих предположениях желобковые колебания разреженной плазмы представляют собой колебания двух взаимно проникающих газов заряженных частиц, взаимодействующих через электростатическое поле. Волновое уравнение желобковых колебаний разреженной, нескомпенсированной плазмы, обобщающее уравнение (2.3), можно привести к виду [119]

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\varphi_1}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \varphi_1 + \frac{4}{\omega/m - \omega_{0i}} \frac{d^2(r^2 \omega_{0i})}{d(r^2)^2} \varphi_1 + \\ + 2 \frac{\omega_{0e} - \omega_{0i}}{(\omega/m - \omega_{0i})(\omega/m - \omega_{0e})} \frac{1}{\omega_i} \frac{d\omega_{pi}^2}{dr^2} \varphi_1 = 0, \end{aligned} \quad (11.6)$$

где

$$\omega_{0j} = \frac{1}{r} \left(\frac{c}{B} \frac{d\varphi_0}{dr} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn} e_j \frac{v_{Tj}^2}{\omega_j B} \frac{dB}{dr} \right).$$

Отметим, что в (11.6) индексы i и e можно поменять местами.

В (11.5) и выражении для угловой скорости дрейфа слагаемое, обязанное радиальной неоднородности магнитного поля, имеет разный знак для электронов и ионов. Поэтому в системах с неоднородным магнитным полем возникновение азимутальной неоднородности плотности приводит к разделению зарядов. Ес-

ли магнитное поле спадает в ту же сторону, что и плотность плазмы, то под действием электрического поля, обусловленного разделением заряда, плазма будет выдрейфовать наружу. При этом первоначальное возмущение плотности усилится, т.е. разовьется желобковая неустойчивость.

В (11.6) описанному механизму развития желобковых возмущений соответствует последнее слагаемое, которым данное уравнение отличается от (11.3). Наиболее простой характер желобковая неустойчивость имеет при однородном вращении $\omega_{0j} = \text{const}$, когда предпоследнее слагаемое в (11.6) отсутствует. В этом случае уравнение (11.6) регулярно, т.е. в нем отсутствуют особые точки, и собственные значения частоты можно оценить из квадратичной по ω формы, получаемой умножением (11.6) на $r\varphi_1^*$ и интегрированием по частям. Для нейтральной плазмы такая оценка дает инкремент желобковой неустойчивости

$$\gamma \approx \omega_{pi} \left(\frac{\omega_{0i} - \omega_{0e}}{\omega_j} \right)^{1/2}.$$

Здесь $\omega_{0i} - \omega_{0e} \approx \frac{\varepsilon_i + \varepsilon_e}{eBr_B^2}$, ε_j — средняя скорость хаотического движения частиц сорта j , считается, что магнитное поле зависит от радиуса по закону $B(r) = B_0(1 - r^2/r_B^2)$.

Предположим теперь, что вращение в скрещенных полях неоднородно, причем перепад угловой скорости по радиусу значительно превышает инкремент желобковой неустойчивости. Для этого степень раскомпенсации плазмы $p = (n_{0i} - n_{0e})/n_{0i}$ должна удовлетворять условию $p \gg r_{dj}/r_B$, где r_{dj} — дебаевский радиус частиц сорта j . В этом случае второе — дестабилизирующее слагаемое в (11.6) существенно лишь в малой окрестности резонансных точек, определяемых условием $\omega_{0j} = \omega/m$. Отметим, что при выполнении приведенного выше условия на величину раскомпенсации обе резонансные точки (ионная и электронная) близки друг к другу.

При такой раскомпенсации плазмы решение (11.6) удобно искать на контуре, обходящем резонансную область в соответствии с правилом обхода Ландау. Если радиус обхода достаточно велик, то на всем контуре влияние второго — дестабилизирующего слагаемого мало. В этом случае рассматриваемые желобковые колебания близки к колебаниям газа заряженных частиц, с плотностью, равной плотности нескомпенсированной части пространственного заряда. Для таких колебаний справедлив аналог теоремы Рэлея, сформулированной в п. 11.1. А именно, желоб-

ковые колебания устойчивы, если плотность пространственного заряда меняется по радиусу монотонно [119]. Данные соображения были подтверждены численным анализом уравнения (11.6), проведенным в [120]. Степень раскомпенсации, необходимая для стабилизации желобковой неустойчивости, найденная в этой работе, приближенно равна $p \approx r_{dj}/r_B$. Это условие согласуется с найденным в эксперименте [5]. В стабилизированном режиме в [5] плотность пространственного заряда возрастала по радиусу и лишь у самой стенки спадала до нуля. Поскольку максимум плотности заряда располагался вблизи хорошо проводящей камеры, то следовало ожидать существенного ослабления неустойчивости, ассоциируемой с ним (аналог неустойчивости Рэлея). Действительно, в [5] в стабилизированном режиме наблюдалась лишь легкая рябь на пристеночной поверхности плазмы.

В экспериментах [5] не всякая достаточно большая раскомпенсация плазмы приводила к стабилизации. Если угловая скорость дрейфа в скрещенных полях менялась немонотонно, то стабилизирующий эффект отсутствовал. Возможно, что в этом случае раскачивалась специфическая неустойчивость, связанная с экстремумом скорости (см. выше). Отметим, что в экспериментах [5] ларморовский радиус значительной части ионов был сравним с размером системы, поэтому в соответствии с оценками [119,141] ее инкремент мог быть довольно большим.

11.3. Желобковые колебания плотной плазмы с холодными ионами в электрическом поле. Плотную плазму при медленных процессах (характерная частота мала по сравнению с плазменной) можно считать квазинейтральной, т.е. плотности электронов и ионов равными. В желобковых колебаниях частицы плазмы смещаются в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Такое движение квазинейтральной плазмы описывается уравнением, сходным по виду с уравнением колебаний плоскопараллельного течения идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости. (Стратифицированной называют жидкость, плотность которой меняется поперек линий тока.) Чтобы убедиться в этом, сложим уравнения движения ионов и электронов. Пренебрегая инерцией последних, получаем

$$\rho \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{B}] - \nabla p. \quad (11.7)$$

В квазинейтральной плазме выполняется условие

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (11.8)$$

при учете которого получаем

$$\operatorname{rot}_z \left(\rho \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} \right) = -\frac{1}{c} (\mathbf{j}\nabla) B. \quad (11.9)$$

Систему уравнений (11.7)–(11.9) следует дополнить уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V}_i = 0. \quad (11.10)$$

При выводе уравнения желобковых колебаний используем ряд упрощений, связанных с их низкой частотой ($\omega \ll \omega_i$) и слабой неоднородностью магнитного поля (обычно характерный масштаб изменения магнитного поля намного превышает размер плазмы). Указанные обстоятельства позволяют считать в (11.9), (11.10) движение плазмы несжимаемым

$$\mathbf{V}_{i1} \approx \frac{c}{B^2} [\mathbf{B}\nabla\varphi_1],$$

а возмущение тока в колебаниях равным

$$\mathbf{j}_1 = \frac{c}{B^2} [\mathbf{B}\nabla p_1].$$

Полагая также движение плазмы изотермическим ($\nabla p_1 = (T_i + T_e)\nabla n_1$), из линеаризованных уравнений (11.8)–(11.10) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r n_0 \frac{d\varphi_1}{dr} - \frac{m^2}{r^2} n_0 \varphi_1 + \frac{1}{\omega - m\omega_0} \frac{m}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{n_0}{r} \frac{d(r^2 \omega_0)}{dr} \right] \varphi_1 + \\ & + \frac{m^2}{r} \frac{1}{(\omega - m\omega_0)^2} \frac{dn_0}{dr} \left(\omega_0^2 - \frac{1}{r} \frac{T_i + T_e}{m_i} \frac{1}{B} \frac{dB}{dr} \right) \varphi_1 = 0. \end{aligned} \quad (11.11)$$

В данном уравнении последнее слагаемое учитывает влияние центробежной силы и неоднородности магнитного поля. Именно эти факторы приводят к развитию желобковой неустойчивости. Если система имеет плоскую симметрию ($r \rightarrow x$, $rd/dr \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, $m/r \rightarrow k$), а магнитное поле однородно, то данное уравнение переходит в уравнение колебаний плоскопараллельного течения идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости (см., например, [121]),

$$\frac{d}{dx} n_0 \frac{d\varphi_1}{dx} - k^2 n_0 \varphi_1 + \frac{1}{\omega - kV_0} k \frac{d}{dx} \left(n_0 \frac{dV_0}{dx} \right) \varphi_1 = 0.$$

Естественно, что для такого упрощенного варианта задачи критерий устойчивости (знакопостоянство величины $\frac{d}{dx} \left(n_0 \frac{dV_0}{dx} \right)$) вполне аналогичен критерию устойчивости Рэлея стратифицированных течений идеальной несжимаемой жидкости. Влияние неоднородности магнитного поля на колебания плоского слоя будет ограничено малой окрестностью резонансной точки при выполнении условия

$$\left(\frac{V_0}{v_T} \right)^2 \gg \frac{r_E^3}{r_n^2 r_B}.$$

Здесь V_0 — характерная скорость дрейфа в скрещенных полях, $v_T = \left(\frac{T_i + T_e}{m_i} \right)^{1/2}$, $r_{E(n,B)}$ — характерный пространственный масштаб изменения электрического поля (плотности, магнитного поля).

Если величина $\frac{d}{dx} \left(n_0 \frac{dV_0}{dx} \right)$ не меняет знака в рассматриваемом интервале, то соображения, аналогичные приведенным в п. 11.1, позволяют надеяться на стабилизацию желобковой неустойчивости, вызываемой неоднородностью магнитного поля.

Реальные системы, предназначенные для магнитного удержания, как отмечалось выше, обычно имеют цилиндрическую симметрию. Тем не менее при описании высших азимутальных мод приближение плоского слоя может оказаться вполне разумным.

Действительно, высшие моды с $m \gg 1$, как правило, «прижимаются» к внешней границе, и область их локализации мала по сравнению с размером плазмы. Поэтому в системах с резко неоднородным вращением следует ожидать подавления по крайней мере высших мод желобковой неустойчивости. Что касается мод с $m \approx 1$, то возможность их стабилизации требует более детального изучения. Целенаправленное исследование влияния неоднородного вращения на устойчивость желобковых колебаний было предпринято на установке ПСП [122,123].

Данная система — это аксиально симметричная открытая магнитная ловушка, в которой анизотропия распределения заряженных частиц (ионов) по скоростям, необходимая для их удержания, создавалась за счет вращения плазмы в скрещенных полях — осевом магнитном и радиальном электрическом. Последнее вводилось в плазму с торцов, представлявших собой набор коаксиальных колец, на которых распределялся поддерживаемый извне электрический потенциал. Как известно,

аксиально симметричные открытые ловушки подвержены желобковой неустойчивости. При однородном вращении в ПСП желобковая неустойчивость должна усиливаться центробежным эффектом. Возможность улучшения устойчивости при неоднородном вращении для подобных систем весьма актуальна. К сожалению, в ПСП плотность плазмы по радиусу менялась немонотонно, обращаясь в нуль при $r = r_{1,2}$ — плазма помещалась между поверхностями двух коаксиальных цилиндров. Поэтому каким бы ни было распределение $\omega_0(r)$ знак величины $\frac{d}{dr} \left[\frac{n_0}{r} \frac{d(r^2 \omega_0)}{dr} \right]$ в интервале (r_1, r_2) не мог оставаться постоянным. В этих условиях можно было надеяться лишь на стабилизацию высших азимутальных мод, локализованных в областях знакопостоянства величины $\frac{d}{dr} \left[\frac{n_0}{r} \frac{d(r^2 \omega_0)}{dr} \right]$. Именно это наблюдалось на эксперименте в случае достаточно резкого изменения скорости вращения у внешней границы плазмы [122,123].

11.4. Желобковые колебания плотной плазмы с горячими ионами. Наряду с дрейфом в скрещенных полях для плазмы в магнитном поле характерен еще один вид движения — ларморовский или обтекающий дрейф. Он возникает при наличии градиента давления плазмы, направленного поперек магнитного поля.

В отсутствие электрического поля гидродинамическое уравнение равновесия для j -й компоненты плазмы имеет вид

$$0 = -\nabla p_j + \frac{e_j n}{c} [\mathbf{V}_j \mathbf{B}], \quad (11.12)$$

откуда $\mathbf{V}_j = \frac{c}{e_j n B^2} [\mathbf{B} \nabla p_j]$, $p_j = n T_j$.

Если, например, градиент давления направлен по радиусу, то частицы дрейфуют в азимутальном направлении, причем как и при дрейфе в неоднородном магнитном поле, электроны движутся навстречу ионам. Однако в отличие от дрейфа в неоднородном магнитном поле ларморовский дрейф не связан с перемещением ларморовских кружков и по своей природе аналогичен току намагничения неоднородных образцов, помещенных в магнитное поле [124] Поэтому он не приводит к разделению зарядов, и следовательно, не может быть причиной неустойчивости. Так, в аксиально симметричном плазменном столбе вектор скорости ларморовского дрейфа направлен по азимуту. При появлении азимутальной компоненты ∇p_j он поворачивается, так что векторы \mathbf{V}_j , ∇p_j остаются взаимно перпендикулярными

(см. (11.12)) и первоначальное возмущение давления не возрастает. (Сравнить с механизмом развития желобковой неустойчивости, описанным в предыдущем п. 11.2.)

В уравнение желобковых колебаний входит среднемассовая скорость ларморовского дрейфа (с учетом знака)

$$\mathbf{V}_{l,ef} = \frac{\sum_j m_j \mathbf{V}_{l,j}}{\sum_j m_j}.$$

В однокомпонентной плазме с не слишком горячими электронами среднемассовая скорость близка к скорости ларморовского дрейфа ионов.

Чтобы учесть влияние ларморовского дрейфа ионов на желобковые колебания необходимо включить в рассмотрение эффекты конечного ларморовского радиуса заряженных частиц. Это можно сделать различными способами, например, дополнив уравнение движения (11.7) силой бесстолкновительной вязкости (см., например, [116]). Можно также использовать бесстолкновительное уравнение Власова, решая его различными способами (см. [125,126]).

В этих работах было получено уравнение желобковых колебаний, учитывающее влияние ларморовского дрейфа:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r^3 S \frac{d\tilde{\varphi}_1}{dr} - (m^2 - 1) S \tilde{\varphi}_1 + r \frac{dn_0}{dr} (m^2 \gamma_0^2 + \omega^2) \tilde{\varphi}_1 = 0, \quad (11.13)$$

где $S = n_0 \omega (\omega - m \omega_{li})$, $\omega_{li} = \frac{c}{e B_0} \frac{T_i}{r n_0} \frac{dn_0}{dr}$, $\tilde{\varphi}_1 = \frac{1}{r} \varphi_1$, $\gamma_0 = \frac{v_{Ti}}{r_B}$ — характерный инкремент желобковой неустойчивости плотной плазмы (инкремент, с которым раскачивается так называемая первая мода), r_B — характерный масштаб изменения магнитного поля в продольном направлении — вдоль \mathbf{B}_0 . В простейших аксиально симметричных открытых ловушках данный параметр связан с радиусом кривизны силовых линий магнитного поля соотношением $R = r_B^2 / r$. В плазме с холодными ионами ($\omega_{li} = 0$) уравнение (11.13) совпадает с (11.11), если в последнем положить $\omega_0 = 0$.

Уравнение (11.13) имеет особенность в точке, где скорость ларморовского дрейфа равна азимутальной фазовой скорости колебаний [126,127]. Поскольку ларморовский дрейф не связан с перемещением ларморовских кружков, то при резонансе с таким движением колебания не могут непосредственно обмениваться энергией и импульсом с заряженными частицами. Поэтому, как

мы увидим ниже, влияние ларморовского дрейфа на колебания оказывается весьма своеобразным.

Предположим сначала, что резонансы с ларморовским дрейфом отсутствуют, и следовательно, уравнение (11.13) регулярно. Это условие заведомо выполняется, например, при однородном радиальном распределении температуры и гауссовском распределении плотности $n_0(r) = n_0(0) \exp[-(r/r_n)^2]$ [128]. В этом случае скорость ларморовского дрейфа постоянна по радиусу, и значения собственных частот желобковых колебаний могут быть оценены с помощью квадратичной формы, получаемой умножением (2.12) на $r\tilde{\varphi}_1$ и интегрированием по радиусу

$$A\omega'^2 + D\omega' + \alpha C = 0. \quad (11.14)$$

Здесь

$$A = \int_0^{r_1} r^3 \left[n_0 \left(1 + \frac{\omega_i^2}{\omega_{pi}^2} \right) \left(\left| \frac{d\tilde{\varphi}_1}{dr} \right|^2 + \frac{m^2 - 1}{r^2} |\tilde{\varphi}_1|^2 \right) + \left| \frac{1}{r} \frac{dn_0}{dr} \right| |\tilde{\varphi}_1|^2 \right] dr,$$

$$D = -m \int_0^{r_1} r^3 n_0 \omega'_{li} \left(\left| \frac{d\tilde{\varphi}_1}{dr} \right|^2 + \frac{m^2 - 1}{r^2} |\tilde{\varphi}_1|^2 \right) dr, \quad C = \int_0^{r_1} r^2 \left| \frac{dn_0}{dr} \right| |\tilde{\varphi}_1|^2 dr,$$

$$\omega' = \frac{\omega}{\omega_{li}(r_0)}, \quad \omega'_{li}(r) = \frac{\omega_{li}(r)}{\omega_{li}(r_0)}, \quad \alpha = \left(\frac{m\gamma_0}{\omega_{li}(r_0)} \right)^2.$$

В качестве характерной частоты $\omega_{li}(r_0)$, нормирующей все величины такой размерности, удобно выбрать ларморовскую частоту в точке, где максимален градиент плотности.

Если считать, что характерный пространственный масштаб $\tilde{\varphi}_1$ равен r_n , то для мод с $m \approx 1$ получим $A \approx D \approx C$. При достаточно больших значениях параметра α колебания неустойчивы, и их инкремент дается выражением

$$\gamma' = \Gamma \sqrt{\alpha/\alpha_c - 1},$$

где $\Gamma = D/(2A)$, $\alpha_c = D^2/(4AC)$.

Для любой моды, кроме наиболее крупномасштабной, так называемой «первой» моды ($m = 1$, $\varphi_1 \propto r$, $\tilde{\varphi}_1 = \text{const}$, $D = 0$), существует критическое значение параметра α_c , ниже которого данная мода должна быть устойчивой. С ростом номера моды значения α_c возрастают, что свидетельствует о лучшей устойчивости высших мод.

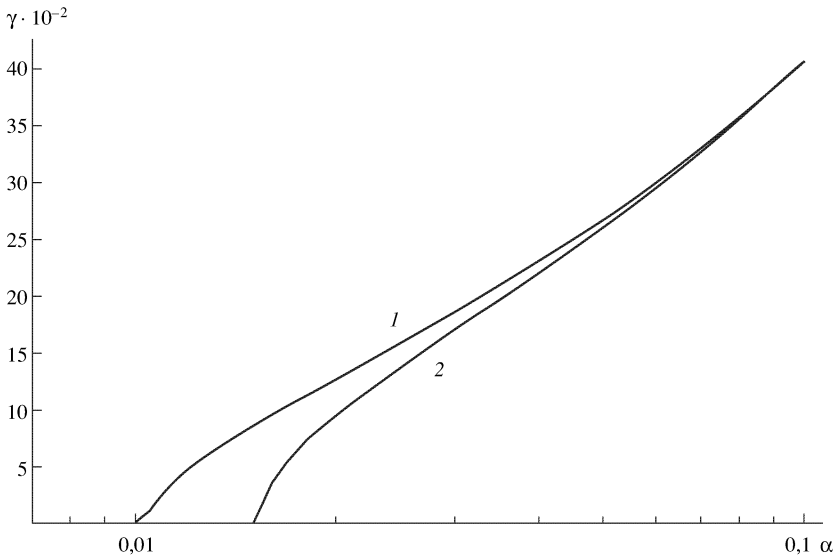


Рис. 11.5. Инкремент желобковой неустойчивости: мода ($n = 0, m = 2$), профиль плотности $n_0(r) = N_0 \left(1 - \tanh \left(\frac{r^2 - r_0^2}{2r_0 \Delta r} \right) \right)$, $r_0/\Delta r = 3, r_1/\Delta r = 6$; 1 — мнимая часть собственных значений частоты уравнения (11.13), 2 — зависимость $\gamma = \Gamma \sqrt{\alpha/\alpha_c - 1}$, где величины Γ, α_c были рассчитаны по кривой 1 при больших значениях α

Наиболее неустойчивы низшие моды с $m \approx 1$, для которых $\alpha_c \approx 1$. Учитывая соотношение $R \approx r_B^2/r$ (R — радиус кривизны силовых линий магнитного поля), условию стабилизации можно придать вид $m^2 R \rho_i^2 \geq r_n^3$, в котором оно обычно приводится. Что касается «первой» моды, то для нее $D = 0$, и она неустойчива при любых значениях α . Поскольку вопрос о стабилизации всех мод, кроме «первой», считался принципиально решенным, значительные усилия теоретиков были направлены на отыскание способов стабилизации именно этой моды (см., например, обзорную работу [129]).

Однако такой подход не учитывает влияния резонансов с ларморовским дрейфом. Между тем, как показано в [130], такие резонансы могут оказаться существенными. Действительно, предполагая, что условие стабилизации выполняется с большим запасом ($\alpha \ll \alpha_c$) находим, что одно из двух решений квадратичного уравнения (меньшее) равно $\omega \approx -\alpha \frac{C}{D} \omega_{li}(r_0)$. Если величина $\omega_{li}(r)$ в пределах системы имеет достаточно большой перепад, то может найтись точка r_s , в которой для рассматриваемых ко-

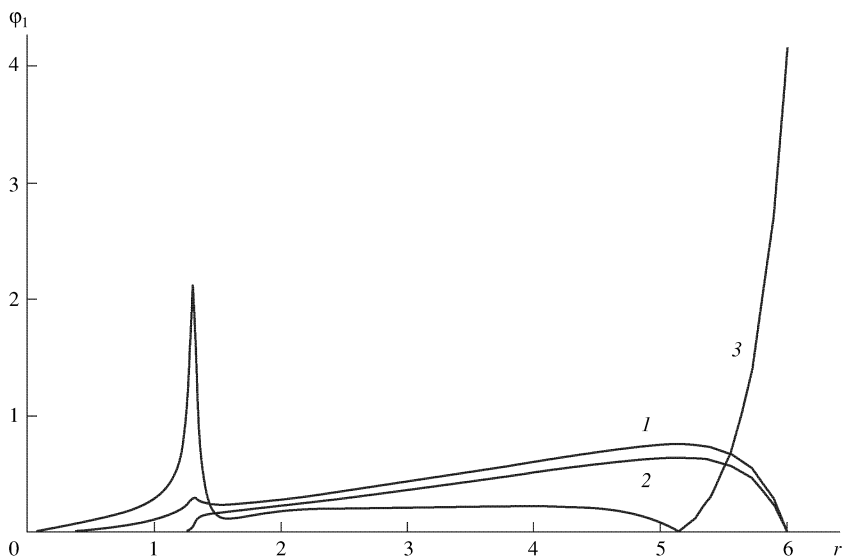


Рис. 11.6. Радиальный профиль возмущений электрического потенциала: 1 — $\text{Im } \varphi_1$, 2 — $\text{Re } \varphi_1$, 3 — $|d\varphi_1/dr|$

лебаний будет выполняться условие резонанса с ларморовским дрейфом. В ее окрестности

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1 &\propto \ln \left(r - r_s - \frac{i \text{Im } \omega}{d\omega_{li}/dr} \right), \\ \frac{d\tilde{\varphi}_1}{dr} &\propto \left(r - r_s - \frac{i \text{Im } \omega}{d\omega_{li}/dr} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (11.15)$$

Благодаря большой величине производной $d\tilde{\varphi}_1/dr$ окрестность именно этой точки будет определять величину коэффициентов A, D . Однако в резонансной области $\omega_{li}(r) \ll \omega_{li}(r_0)$, и следовательно, эффективное значение величины $\alpha_c \propto D^2 \propto \omega_{li}^2(r_s)$ окажется значительно меньше просто среднего. В результате неустойчивость распространится на область меньших значений параметра α . Эти соображения подтверждаются численными расчетами, проведенными в [130] для ряда простейших профилей плотности плазмы (рис. 11.5, 11.6). Как следует из рис. 11.5 благодаря влиянию резонансов с ларморовским дрейфом неустойчивость существует при $\alpha < \alpha_c$. Рисунок 11.6 недвусмысленно показывает, что расширение области неустойчивости связано резонансному взаимодействию с ларморовским дрейфом.

Чтобы устранить неустойчивость, вызываемую резонансом с ларморовским дрейфом, частоту желобковых колебаний следует сделать меньше минимальной частоты ларморовского дрейфа в пределах системы $\omega_{li,\min}$. Приближенное выражение для действительной части частоты рассматриваемых колебаний можно представить в виде $\omega \approx \gamma_0^2 / m\omega_{li,av}$, где $\omega_{li,av}$ — некоторая средняя частота ларморовского дрейфа. Поэтому в системах с неоднородным ларморовским вращением условие стабилизации принимает вид

$$m\omega_{li,\min} \geq \gamma_0^2 / m\omega_{li,av}.$$

Отметим, что приведенное выше условие стабилизации, получаемое без учета резонансов с ларморовским дрейфом $m^2 R\rho_i^2 \geq r_n^3$ (см. выше), в этих терминах принимает вид

$$m\omega_{li,av} \geq \gamma_0.$$

Из сопоставления этих двух условий следует, что в системах с достаточно большим перепадом скорости ларморовского дрейфа влияние резонансного взаимодействия может привести к значительному расширению области неустойчивости.

Аналогичным образом диссипация, как правило, расширяет область «идеальных» неустойчивостей. Однако в случае неустойчивых колебаний резонансные эффекты, в отличие от диссипативных, включены в «идеальной» волновое уравнение. Можно сказать, что резонансное взаимодействие эффективно вводит диссипацию в это уравнение.

Проанализируем баланс энергии в неустойчивых колебаниях. Как известно, плотность энергии потенциальных колебаний дается выражением

$$W = \frac{1}{8\pi} \frac{d}{d\omega} \omega \varepsilon_{ik} \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}.$$

Для ее нахождения используем то обстоятельство, что волновое уравнение, которому должны удовлетворять любые потенциальные колебания, можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \varepsilon_{ik} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} = 0. \quad (11.16)$$

Нетрудно показать, что уравнение (11.16) отличается от (11.13) постоянным множителем $(\omega_{pi}\omega)^2 / (\omega_i^2 n_0)$. Помножим (11.16) на φ_1^* и проинтегрируем результат по частям, полагая, что на границе возмущение потенциала обращается в ноль:

$$\int \varepsilon_{ik} |\nabla \varphi_1|^2 d\mathbf{r} = 0.$$

Будем считать, что тензор ε_{ik} эрмитов, а колебания нарастают с малым инкрементом ($\omega \gg \gamma$). Оба эти условия выполняются для неустойчивых колебаний, рассматриваемых нами. Выделим мнимую часть интеграла в последнем соотношении, разлагая тензор ε_{ik} в ряд по малому отношению $i\gamma/\omega$, и сложим результат с действительной частью, помноженной на $i\gamma/\omega$. В результате приходим к равенству, определяющему изменение энергии колебаний во времени:

$$Q = \int \dot{W} d\mathbf{r} = \frac{\gamma}{4n_0} \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_i} \right)^2 \int_0^{r_0} r \left[r^2 n_0 \left| \frac{d\tilde{\varphi}_1}{dr} \right|^2 + (m^2 - 1)n_0 |\tilde{\varphi}_1|^2 - r \frac{dn_0}{dr} |\tilde{\varphi}_1|^2 + \left(\frac{m\gamma_0}{\omega} \right)^2 r \frac{dn_0}{dr} |\tilde{\varphi}_1|^2 \right] dr = 0. \quad (11.17)$$

Равенство нулю полной волновой энергии колебаний вполне естественно, поскольку нами рассматривается замкнутая консервативная система. В процессе раскачки неустойчивости полная энергия не меняется, а лишь перетекает из одной области в другую.

В случае низкочастотных колебаний с $\omega \ll \gamma_0$ всюду, кроме малой окрестности резонансной точки, основным слагаемым в подынтегральном выражении в скобках (11.17) является последнее. Оно отрицательно для профилей плотности, спадающих по радиусу. Это означает, что при возрастании амплитуды колебаний плазма отдает тепловую энергию. Выделяющаяся энергия перетекает в резонансную область, где накапливается в форме колебательной энергии ионов.

В этой области, согласно (11.15), резко возрастает первое слагаемое в подынтегральном выражении.

Чтобы найти инкремент неустойчивости, оценим интеграл от первого слагаемого в (11.17) с помощью равенства

$$\int \frac{\gamma dr}{(r - r_s)^2 + (\gamma/\omega'_{li,r})^2} = \pi |\omega'_{li,r}|$$

и сопоставим его с интегралом от последнего слагаемого:

$$\gamma \approx \gamma_0^2 |\omega'_{li,r}|_{r=r_s} \frac{r_0}{\omega_{li,av}^2}.$$

Рост инкремента с увеличением $\left| \omega'_{li,r} \right|_{r=r_s}$ является следствием сокращения «резонансной зоны». В результате ионы менее активно участвуют в колебаниях, и для раскачки ионных осцилляций требуется меньшее количество энергии.

Выше по отдельности рассматривалось влияние на желобковые колебания резонансов с дрейфом в скрещенных полях и с ларморовским дрейфом. При наличии в горячей плазме электрического поля резонансы с ларморовским дрейфом трансформируются в резонансы с полной гидродинамической скоростью, включающей оба вида дрейфового движения. Вместе с тем остаются возможными и резонансы с одним только дрейфом в скрещенных полях. Уравнение желобковых колебаний горячей плазмы, в которой присутствует электрическое поле имеет вид (11.13) с заменами $\tilde{\varphi}_1 \rightarrow \varphi_1/r(\omega - \omega_0)$, $S \rightarrow n_0(\omega - \omega_0)(\omega - \omega_0 - \omega_{li})$ (см. [125,126]). Анализ желобковых колебаний в присутствии резонансов обоих типов — дело будущего.

11.5. О явлении ларморовского резонанса. 11.5.1.

Плазма с неоднородными распределениями плотности и температуры. Резонансы с ларморовским дрейфом, столь ярко проявившиеся в проблеме устойчивости желобковых колебаний, представляют интерес для более широкого круга задач. Так, резонансы с ларморовским дрейфом, как и альвеновский, плазменный и др. резонансы, можно использовать для нагрева плазмы. Имея в виду эту возможность, проанализируем физические процессы, действующие при резонансе с колебаниями, инкремент которых равен нулю. (Такие колебания могли бы возбуждаться внешним источником.)

Анализ будем проводить на примере желобковых колебаний, т.е. колебаний с $k_{||} = 0$, которые представляют собой простой и удобный объект для изучения интересующего нас явления. В результате анализа мы должны, в частности, получить правило продолжения решения волнового уравнения через точку ларморовского резонанса.

Эта точка является особой точкой упрощенного волнового уравнения желобковых колебаний (11.13). В п. 11.4 особенность при действительных значениях координаты устранялась за счет того, что рассматривались колебания с $\text{Im } \omega > 0$, т.е. по существу использовалось правило обхода Ландау. Однако возможность использования этого рецепта при $\text{Im } \omega = 0$ требует обоснования.

Многочисленные примеры, рассмотренные ранее, говорят о том, что такой подход справедлив, если в окрестности резонансной точки происходит отбор энергии колебаний. В случае желобковых колебаний с $\text{Im } \omega > 0$ энергия затрачивается на раскачку осцилляций тяжелых ионов. Однако при $\text{Im } \omega = 0$, когда колебания переходят в нейтральные, отбор энергии ионами прекращается.

Для того чтобы правило обхода Ландау оставалось справедливым и в этом случае, должен открыться какой-то иной канал стока энергии. Его выявление является нашей целью.

Предположим сначала, что неоднородны как плотность плазмы, так и ее температура. В этом случае для регуляризации уравнения желобковых колебаний достаточно более полно учесть эффекты конечного ларморовского радиуса ионов. Выражение для возмущения функции распределения, полностью учитывающее эти эффекты, можно получить, решая линейризованное кинетическое уравнение стандартным методом интегрирования по траекториям. Нулевой момент возмущения функции распределения — возмущение плотности имеет вид

$$n_{1i} = e \int \exp(ik_x x) \varphi_1(k_x) \int \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} - \left[\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} + \frac{k_y}{m_i \omega_i (\omega + k_y g / \omega_i)} \frac{\partial f_0}{\partial \zeta} \right] \times \right. \\ \left. \times J_0(\xi) \exp[i\xi \sin(\theta - \chi)] \right\} d\mathbf{v} dk_x. \quad (11.18)$$

Здесь

$$f_0(\mathbf{v}) = n_0(\zeta) \left[\frac{m_i}{2\pi T_0(\zeta)} \right]^{3/2} \exp \left[-\frac{m_i v^2}{2T_0(\zeta)} \right]$$

— начальная функция распределения ионов, $\zeta = x + v_y / \omega_i$, ω_i — ионная циклотронная частота, θ — угол ларморовского вращения ионов, $\chi = \arctg(k_y / k_x)$, $\xi = kv_{\perp} / \omega_i$, J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. Поскольку нас интересуют явления, разыгрывающиеся в окрестности резонансной точки, то для упрощения формул мы перешли от цилиндрической геометрии к плоской. Как обычно при рассмотрении колебаний плоского слоя моделируем неоднородность магнитного поля введением эффективного ускорения силы тяжести $g = v_{Ti}^2 / R$.

В окрестности резонансной точки в связи с сокращением характерного пространственного масштаба возмущения в выражении для n_{1i} становятся существенными следующие члены разложения по ρ_i . В случае плазмы с неоднородным распреде-

лением температуры для регуляризации уравнения желобковых колебаний достаточно учесть члены четвертого порядка по ρ_i , содержащие четвертую производную φ_1 ($k_x \rightarrow -id/dx$). Их учет в условии квазинейтральности приводит к обобщению (11.13):

$$-\frac{3}{4}n_0\Omega_{Li}\rho_i^4\frac{d^4\varphi_1}{dx^4} + \frac{d}{dx}n_0(\omega - \Omega_{Li})\frac{d\varphi_1}{dx} - k_y^2n_0(\omega - \Omega_{Li})\varphi_1 + \frac{k_y^2g}{\omega}\frac{dn_0}{dx}\varphi_1 = 0, \quad (11.19)$$

где $\Omega_{Li} = \frac{k_y c}{eB} \frac{dT_0}{dx}$, $\rho_i^2 = \frac{T_0}{m_i \omega_i}$.

Смещая начало отсчета в резонансную точку а также производя замену $\omega - \Omega_{Li}(x) \approx -\Omega'_{Li,x}x$ и опуская в (11.19) малое слагаемое, пропорциональное $x\varphi_1$, приводим это уравнение к стандартному виду уравнений четвертого порядка с малым параметром перед старшей производной:

$$\frac{1}{\Lambda} \frac{d^4\varphi_1}{dx^4} + \frac{d}{dx}x \frac{d\varphi_1}{dx} + P\varphi_1 = 0, \quad (11.20)$$

где

$$\Lambda = \frac{4}{3} \frac{\Omega'_{Li,x}}{\rho_i^2 \Omega_{Li}}, \quad P = -\frac{k_y^2 g}{\omega \Omega'_{Li,x}} \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx}.$$

Величины P и $\Omega'_{Li,x}$ для определенности считаются положительными.

Уравнение (11.20) идентично по виду уравнению высокочастотных альвеновских колебаний. Оно проанализировано в Приложении 4 (см. также п. 8.1). Из результатов анализа следует, что «длинноволновые» желобковые колебания, падающие на точку ларморовского резонанса справа, полностью трансформируются в коротковолновые, убегające от этой точки. При принятых знаках величин P и $\Omega'_{Li,x}$ области прозрачности колебаний обоих типов располагаются справа от резонансной точки.

Асимптотика интересующего нас длинноволнового решения может быть приближенно найдена из упрощенного уравнения (11.13). В окрестности резонансной точки она имеет вид

$$U_2 \approx -\pi i H_0^{(2)}(2\sqrt{Px}).$$

Учет члена с четвертой производной в (11.20) приводит к тому, что в малой окрестности резонансной точки, а также в

секторе комплексного переменного $0 < \arg x < 2\pi/3$, граничащем с действительной осью, решение U_2 модифицируется

$$U_2 \approx -\pi i H_0^{(2)}(2\sqrt{Px}) + \frac{\pi^{1/2}}{x^{3/4}\Lambda^{1/4}} \exp\left(-\frac{2i}{3}x^{3/2}\Lambda^{1/2} + \frac{i\pi}{4}\right). \quad (11.21)$$

В секторе $0 < \arg x < 2\pi/3$, где второе слагаемое в (11.21) является основным, оно экспоненциально нарастает. Если нас интересует только длинноволновая часть решения, то при его продолжении через резонансную точку, последнюю можно обходить в комплексной плоскости снизу. Нетрудно видеть, что в силу принятого выше условия $\Omega'_{li,x} > 0$ правило обхода совпадает с правилом обхода Ландау.

Дисперсионное уравнение коротковолновых колебаний может быть получено из (11.19), если в нем отбросить последнее слагаемое

$$\omega \approx \Omega_{li} - \frac{3}{4}\Omega_{lTi}\rho_i^2 k_x^2. \quad (11.22)$$

Из данного выражения следует, что дисперсия коротковолновых колебаний аномальна — их групповая скорость направлена навстречу фазовой. Это необходимо учитывать при интерпретации выражения (11.21), в котором фаза последнего слагаемого убывает с ростом координаты x .

Сопоставим количество энергии, уносимое коротковолновыми колебаниями в случае $\text{Im}\omega = 0$, с количеством, потребляемым ионами в случае нарастающих колебаний при $\text{Im}\omega \rightarrow 0$ (см. п. 11.4). По аналогии с п. 11.4 выражение для линейной плотности мощности, теряемой длинноволновыми колебаниями в окрестности резонансной точки, в виде

$$Q_{\text{res}} = Cq,$$

где $C = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_i}\right)^2 \Omega'_{li,x}$, $q = \text{Im} \int \varphi^* \hat{L}\varphi dx$, \hat{L} — дифференциальный оператор уравнения (11.20), в выражении для q интегрирование происходит по окрестности резонансной точки.

Если $\text{Im}\omega = \gamma \neq 0$, то резонансная точка смещается в комплексную плоскость — оператор \hat{L} становится регулярным при действительных значениях x , и поэтому в нем может быть опущено первое слагаемое с четвертой производной. В окрестности резонансной точки интересующее нас длинноволновое решение

имеет вид $U_2 \approx \ln \left(x - i\gamma/\Omega'_{li,x} \right)$. Используя это представление, при $\gamma \rightarrow 0$ находим $q = \pi$.

Предположим теперь, что колебания стационарны $\gamma = 0$. В этом случае колебательная энергия ионов не меняется, однако возникает поток энергии, уносимой коротковолновыми колебаниями из резонансной зоны. При его оценке используем полное выражение для оператора \hat{L} . Производя интегрирование по частям, получаем

$$q = \frac{1}{\Lambda} \left(-\varphi_{1,sw}^* \varphi_{1,sw}''' + \varphi_{1,sw}'^* \varphi_{1,sw}'' \right)^\infty - x \varphi_{1,sw}^* \varphi_{1,sw}' |^\infty. \quad (11.23)$$

Здесь $\varphi_{1,sw}$ — коротковолновая часть решения. В (11.23) учтено, что коротковолновые колебания убегают в область $x > x_s$. В отсутствие диссипации поток энергии не зависит от расстояния, поэтому его можно найти с помощью решения (11.21), справедливого на небольшом расстоянии от резонансной точки. Учитывая, что для коротковолновой части решения справедливо соотношение $\varphi_{1,sw}' \approx -ik_x \varphi_{1,sw}$, где $k_x \approx (x\Lambda)^{1/2}$, приходим к тому же самому результату $q = \pi$. Таким образом, как и следовало ожидать, при $\gamma = 0$ поток энергии, уносимой коротковолновыми колебаниями, в точности равен энергии, потребляемой резонансными ионами при $\gamma \neq 0$.

Мы проанализировали физический смысл одного из решений уравнения (11.20). Как и в случае высокочастотных альвеновских колебаний, решение U_3 описывает обратный процесс трансформации коротковолновых колебаний в длинноволновые. По аналогии с альвеновскими колебаниями при немонотонном профиле скорости ларморовского дрейфа могут существовать собственные колебания, «запертые» между точками ларморовского резонанса и представляющие собой совокупность длинноволновых и коротковолновых колебаний. Они трансформируются друг в друга при отражении от резонансных точек (рис. 8.3).

Выясним теперь какова дальнейшая судьба коротковолновых колебаний, порождаемых длинноволновыми в точке ларморовского резонанса. Пространственная зависимость коротковолновых колебаний может быть представлена в квазиклассическом виде

$$\varphi_1(x) \propto \exp \left(i \int^x k_x(x, \omega) dx \right).$$

Для анализа таких колебаний можно использовать соотношение (2.17), положив в нем $\varphi_1(k_x) \propto \delta(k_x - k_x(x, \omega))$. При этом получаем

$$n_{1i} \approx \left[-1 + \left(1 - \frac{\Omega_{lni}}{\omega} \right) F_i - \frac{\Omega_{lTi}}{\omega} b_i F_i' \right] n_0 \frac{e\varphi_1}{T_0},$$

где $F_i = \exp(-b_i) I_0(b_i)$, $b_i = (k_x \rho_i)^2$.

Возмущение плотности электронов может быть найдено в гидродинамическом приближении

$$n_{1e} \approx -\frac{\Omega_{lne}}{\omega} n_0 \frac{e\varphi_1}{T}.$$

Используя условие квазинейтральности плазмы, получаем локальное дисперсионное уравнение коротковолновых колебаний, обобщающее (11.22),

$$\omega \approx \Omega_{lni}(x) + \frac{b_i F_i'}{F_i - 1} \Omega_{lTi}(x). \quad (11.24)$$

Выше мы видели, что уход колебаний от точки ларморовского резонанса, в которой $\omega = \Omega_{li} = \Omega_{lni} + \Omega_{lTi}$, сопровождается ростом волнового числа. Из (11.24) следует, что оно стремится к бесконечности по мере приближения колебаний к точке, в которой $\omega = \Omega_{lni} \left(F_i \xrightarrow{b_i \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi b_i}} \right)$. В ее окрестности происходит накопление колебаний. Здесь они, в конце концов, и поглощаются под действием ион-ионных столкновений [131]. Отметим, однако, что если знаки производных dn_0/dx , dT_0/dx различны, то ион-ионные столкновения могут приводить к нарастанию коротковолновых колебаний.

Вообще говоря, возможны и такие распределения плотности плазмы, при которых условие $\omega = \Omega_{lni}$ не выполняется нигде в пределах системы. В этом случае, если коэффициент отражения от границы отличен от нуля, коротковолновые колебания должны вернуться к точке ларморовского резонанса. Изменение их комплексной амплитуды в результате пробега по системе можно учесть множителем $\Theta = R \exp(i\Phi - \Psi)$, где

$$\Phi = \oint k_x dx, \quad \Psi = \oint \text{Im } k_x dx + \text{Im } \omega \oint \frac{\partial}{\partial \omega} \text{Re } k_x dx.$$

В выражении для Ψ первое слагаемое учитывает обмен энергией между колебаниями и плазмой во время пробега по системе,

второе — изменение амплитуды колебаний в точке резонанса за время пролета.

Включим в рассмотрение колебания, отраженные от границы. Точка ларморовского резонанса ограничивает область прозрачности коротковолновых колебаний. Слева от нее, т.е. при $x < 0$, амплитуда отраженных колебаний должна быть экспоненциально малой. Соответствующее решение уравнения (11.20) дается функцией

$$A_1 \approx \frac{\pi^{1/2}}{|x|^{3/4} \Lambda^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}|x|^{3/2} \Lambda^{1/2} + \frac{i\pi}{2}\right).$$

Для нахождения решения в области прозрачности воспользуемся соотношением (П.4.15). Из него следует, что коротковолновые колебания, падающие на резонансную точку справа, отражаются от нее с коэффициентом отражения, равным единице (амплитуды решений A_2 и A_3 при $\arg x = 0$ равны по модулю). Одновременно с этим в области $x > 0$ появляется длинноволновое решение V .

Таким образом, при учете отраженной волны правило продолжения через резонансную точку «сингулярного» длинноволнового решения принимает вид

$$\begin{aligned} & -\pi i H_0^{(2)}(2\sqrt{Px}) + \Theta \frac{\pi^{1/2}}{|x|^{3/4} \Lambda^{1/4}} \exp\left(-\frac{2i}{3}|x|^{3/2} \Lambda^{1/2} + \frac{i\pi}{2}\right) \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow -\pi i H_0^{(2)}(2\sqrt{Px}) + 2\Theta \pi i J_0(2\sqrt{Px}) + (1 - \Theta) \frac{\pi^{1/2}}{x^{3/4} \Lambda^{1/4}} \times \\ & \times \exp\left(-\frac{2i}{3}x^{3/2} \Lambda^{1/2} + \frac{i\pi}{4}\right) + \Theta \frac{\pi^{1/2}}{x^{3/4} \Lambda^{1/4}} \exp\left(\frac{2i}{3}x^{3/2} \Lambda^{1/2} - \frac{i\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

При анализе длинноволновых колебаний влияние отражения можно учесть, модифицируя правило обхода резонансной точки. Действительно, функция $H_0^{(2)}(2\sqrt{Px})$ имеет при $x = 0$ логарифмическую точку ветвления

$$H_0^{(2)}(2\sqrt{Px}) = -\frac{i}{\pi} \ln x J_0(2\sqrt{Px}) + F(x),$$

где $F(x)$ — аналитическая функция. При обходе резонансной точки по Ландау, т.е. снизу, функция $\ln x$ преобразуется в соответствии с соотношением

$$\ln(|x|) \leftrightarrow \ln x + i\pi. \quad (11.25)$$

Использование этого соотношения приводит к появлению в решении дополнительной составляющей $i\pi J_0(2\sqrt{Px})$. Аналогичная составляющая в правой части, обязанная учету отраженных колебаний, может быть эффективно учтена посредством перепределения

$$\ln(|x|) \leftrightarrow \ln x + i\pi(1 - 2\Theta).$$

Модификацию соотношения можно интерпретировать как изменение $\arg x$ на дополнительный комплексный «угол» $-2\pi\Theta$ при переходе под точкой $x = 0$ слева направо.

Отметим, что модифицированное правило обхода Ландау вводилось также в задаче о циклотронном резонансе в неоднородном магнитном поле [72]. В этом случае необходимость модификации была обусловлена тем, что при слабых случайных воздействиях у заряженных частиц, неоднократно проходящих через точку циклотронного резонанса, была «слишком хорошая фазовая память», так что каждый акт резонансного взаимодействия влиял на последующие.

11.5.2. Плазма с неоднородным распределением плотности и однородным распределением температуры. В более простом случае однородного распределения температуры, используя (11.18), можно получить довольно компактное выражение для n_{1i} , учитывающее эффекты всех порядков по $k\rho_i$ и первого порядка по ρ_i/r_n . Учет последних необходим для правильного предельного перехода при $\rho_i \ll 1$ к уравнению (11.13), в котором содержится член, пропорциональный $\frac{1}{r_n} \frac{d\varphi_1}{dx}$. Соответствующее условие квазинейтральности можно представить в виде

$$0 = n_{1i} - n_{1e} = \frac{e}{T_0} \int \exp(ik_x x) \varphi_1(k_x) \left[G_i(x)(F_i - 1) + \frac{i}{2} G_i'(x) \frac{dF_i}{dk_x} \right] dk_x, \quad (11.26)$$

где $G_i(x) = n_0(x) \left[1 - \frac{\Omega_{ii}(x)}{\omega} \right]$.

Чтобы получить дифференциальное волновое уравнение для $\varphi_1(x)$, в (11.26) k_x следует заменить оператором id/dx , применив его к $\varphi_1(x) = \int e^{ik_x x} \varphi_1(k_x) dk_x$. Если в (11.26) функцию F_i разложить в ряд по $k_x \rho_i$ и ограничиться членами некоторого конечного порядка, то порядок дифференциального волнового уравнения будет совпадать с порядком разложения. Причем каким бы порядком мы ни ограничились, коэффициент перед старшей

производной в волновом уравнении будет обращаться в нуль в точке ларморовского резонанса.

В точке ларморовского резонанса, как следует из (11.18), ионы имеют больцмановское распределение. Очевидно, что оно не может измениться под действием ион-ионных столкновений.

Таким образом, мы приходим к заключению, что при однородном распределении температуры учет эффектов конечного ларморовского радиуса ионов и ион-ионных столкновений не позволяет регуляризовать волновое уравнение.

Выше плазма считалась квазинейтральной, а ее колебания потенциальными. Если электрическое поле колебаний содержит непотенциальную составляющую

$$\mathbf{E}_1 = -\nabla\varphi_1 + \frac{i\omega}{c}\mathbf{A}_1,$$

то как нетрудно показать, возмущение функции распределения в точке ларморовского резонанса будет даваться выражением

$$f_{i1} = \frac{ie}{k_y T} E_{y1} f_0,$$

обобщающим состояние больцмановского равновесия. Что касается слагаемых, пропорциональных производным электрического поля $d^n\varphi_1/dx^n$, то они, как и в случае потенциальных колебаний, в точке ларморовского резонанса обращаются в нуль.

Эффекты неквазинейтральности плазмы можно учесть в (11.26) заменой

$$G_i \rightarrow n_0 \left(1 + \frac{\omega_i^2}{\omega_{pi}^2} - \frac{\Omega_{li}}{\omega} \right);$$

при этом слагаемые с производными выше второй остаются неизменными. Следовательно, воздействие эффектов неквазинейтральности и непотенциальности также не делает задачу регулярной.

Сокращение пространственного масштаба возмущения при приближении к резонансной точке ведет к росту электрического поля колебаний, поэтому, вообще говоря, не исключено, что в окрестности данной точки окажутся существенными нелинейные эффекты. Получим нелинейное уравнение для случая нейтральных колебаний с $\text{Im}\omega = 0$. Анализ удобно проводить в системе отсчета, движущейся вместе с волной. При переходе в

эту систему возникает дополнительное индукционное электрическое поле $\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\omega}{k_y c} B$, а движение плазмы принимает вид стационарного течения. Причем в точке ларморовского резонанса невозмущенная гидродинамическая скорость

$$V_{0y} = \frac{c}{B} \left(\frac{d\varphi_0}{dx} + \frac{T_0}{e} \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx} \right)$$

обращается в нуль — ионы имеют локальное больцмановское распределение.

При анализе движения электронов можно считать, что под действием электрического поля они дрейфуют со скоростью $\mathbf{V} = \frac{c}{B^2} [\mathbf{B}\nabla\varphi]$. Используя уравнение непрерывности, находим, что $n(\mathbf{r}) = n(\varphi(\mathbf{r}))$, где $n(\varphi)$ — произвольная функция.

Чтобы получить содержательное волновое уравнение в уравнении движения ионов необходимо удержать силу инерции, а также ввести в него силу бесстолкновительной вязкости. С ее помощью, как известно (см., например, [116]) можно в низших порядках по малому параметру $\rho_i \frac{d}{dx}$ учесть эффекты конечного ларморовского радиуса ионов. Опуская промежуточные выкладки, приведем нелинейное волновое уравнение, получаемое из условия квазинейтральности плазмы

$$\nabla \left[n \frac{d\Phi}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \nabla \left(\frac{d\varphi/dy}{d\varphi/dx} \right) \right] - \frac{1}{\omega_i} \nabla \left(n \left[\mathbf{g} \frac{\mathbf{B}}{B} \right] \right) = 0, \quad (11.27)$$

где

$$\Phi = \frac{cT}{eB} \ln \left[n \exp \left(\frac{e\varphi}{T} \right) \right].$$

В линейном пределе, когда выполняется условие $|d\varphi/dy| \ll |d\varphi/dx|$, данное уравнение совпадает с плоским аналогом (11.13), если в последнем положить $\omega = 0$. С другой стороны, при $T = 0$ (11.27) переходит в нелинейное уравнение, приведенное в [132].

Выше отмечалось, что в линейном пределе точке ларморовского резонанса x_s в лабораторной системе отсчета соответствует точка покоя в сопутствующей системе (линия на плоскости XOY). В нелинейном режиме линия $x = x_s$ трансформируется в «больцмановскую» линию тока, на которой $n(\varphi) = C \exp(-e\varphi/T)$. Нетрудно видеть, что на данной линии коэффициент перед старшей производной в уравнении (11.27)

обращается в нуль. Таким образом, нелинейное уравнение, как и все рассмотренные выше варианты линейного, оказывается сингулярным.

Поскольку в состоянии ларморовского резонанса выключаются эффекты, кажущиеся на первый взгляд наиболее существенными, следует обратить внимание на такие, которые обычно игнорируются. В системе отсчета, сопутствующей рассматриваемым колебаниям, ионы в точке ларморовского резонанса покоятся. В то же время электроны, находящиеся в этой точке, дрейфуют относительно ионов под действием индукционного электрического поля. В изотермическом случае эта скорость удваивается за счет ларморовского дрейфа электронов. Следовательно, в окрестности точки ларморовского резонанса должны проявляться эффекты, обусловленные электрон-ионным трением. Действительно, в Приложении 5 показано (см. также [131]), что учет электрон-ионных столкновений позволяет регуляризовать волновое уравнение желобковых колебаний. При этом оказывается, что для описания длинноволновых решений можно использовать упрощенное «идеальное» уравнение типа (11.13), дополненное правилом обхода Ландау.

Проведенное рассмотрение показывает, что возможность использования правила обхода Ландау при решении волнового уравнения свидетельствует об отборе энергии колебаний в окрестности резонансной точки. При однородном распределении температуры энергия диссипирует в результате ион-электронных столкновений. Если распределение температуры неоднородно, то колебаний в окрестности резонансной точки трансформируются в более коротковолновые. Последние поглощаются под действием ион-ионных столкновений в окрестности точки, в которой фазовая скорость колебаний совпадает со скоростью ларморовского дрейфа, рассчитанной в предположении однородности температуры. Обычно в высокотемпературной («термоядерной») плазме частоты кулоновских столкновений малы по сравнению с другими характерными частотами, однако влияние столкновений усиливается с уменьшением пространственного масштаба явления. В областях, где происходит поглощение колебаний, масштаб резко сокращается, и именно поэтому столкновительное поглощение оказывается конечным, даже если частоту столкновений формально устремить к нулю. Столкновения переводят энергию колебаний в тепловую. Поэтому явление ларморовского резонанса наряду с альвеновским, плазменным и др. можно использовать для нагрева плазмы.

11.6. О влиянии гидродинамического резонансного взаимодействия на другие виды колебаний Явление гидродинамического резонансного взаимодействия, которому посвящена настоящая глава, имеет универсальный характер и, разумеется, должно действовать не только на желобковые колебания (см., например, обзорные работы [4,12]). В качестве примера укажем на одну из простейших задач — о колебаниях электронного потока в продольном магнитном поле. При достаточно большой величине магнитного поля поперечные смещения электронов можно не учитывать, считая их движение одномерным. В случае электронного потока с линейным профилем скорости, ограниченного идеально проводящими стенками, задача решается аналитически [133]. Оказывается, что при любой величине градиента поток устойчив, причем существует его критическое значение $(dV_0/dx)_c = 2\omega_{pe}$, выше которого в потоке отсутствуют незатухающие собственные колебания (аналог теоремы Рэлея). Устранение незатухающих собственных колебаний обусловлено резонансным взаимодействием колебаний с потоком. В [133] также показано, что вывод о неустойчивости потока при выполнении условия $dV_0/dx > 2\omega_{pe}$, сделанный в работе [134], обязан математической ошибке. Отметим, что [134] явилась одной из работ, способствовавших распространению представления о дестабилизирующем воздействии всякого скольжения слоев плазмы (slipping-неустойчивости).

Во многих задачах колебания неоднородно движущейся плазмы описываются уравнениями вида

$$\varphi''_{xx} + [-k^2 + U(x)]\varphi = 0, \quad (11.28)$$

где функция $U(x)$ стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$ и имеет полюс, соответствующий точке гидродинамического резонанса

$$U(x) \propto 1/[\omega - kV_0(x)]^n.$$

Колебания, описываемые уравнениями вида (11.28), устойчивы, поскольку для таких уравнений характерно отсутствие собственных функций [12]. Действительно, решение (11.28), спадающее при $x \rightarrow \infty$, имеет асимптотику $\varphi \propto e^{-kx}$. Чтобы найти вид решения при $x \rightarrow -\infty$, удобно область малых x обходить на достаточно большом расстоянии в комплексной плоскости по контуру, на котором $|U(x)| \ll k^2$. Очевидно, что в результате мы получим нарастающее решение. Аналогичным образом решение $\varphi \propto e^{kx}$, спадающее при $x \rightarrow -\infty$, нарастает при $x \rightarrow \infty$. Таким образом,

приходим к выводу, что у уравнения (1.28) отсутствуют собственные функции. (Более подробно см. [142].) Доказательство основывалось на том, что $|U(x)| \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Это свойство функции

$U(x)$ обусловлено наличием резонансного знаменателя. Поэтому естественно считать, что устойчивость рассматриваемых течений вызывается резонансным поглощением колебаний.

В случае реальных — ограниченных систем остается возможность раскочки колебаний с небольшим инкрементом, резонирующих с течением в окрестности граничной точки (аналог неустойчивости паузейлевского течения обычной жидкости). При анализе таких колебаний, чтобы удовлетворить граничным условиям, приходится рассматривать решение в области, где условие $|U(x)| \ll k^2$ не выполняется.

Сингулярное уравнение (11.28) представляет собой асимптотику более полного — регулярного волнового уравнения. Регуляризация достигается учетом мелкомасштабных эффектов (вязкость, конечность ларморовского радиуса и т.д.), которые становятся существенными в определенной области комплексного x , включающей сингулярную (резонансную) точку. Обычно (см., например, выше) положение «мелкомасштабной» области таково, что ее можно обойти в комплексной плоскости по правилу обхода Ландау. Соответственно, в случае нейтральных и затухающих колебаний «мелкомасштабная» область захватывает часть действительной оси, и следовательно, уравнения вида (11.28), вообще говоря, непригодны для анализа таких колебаний.

При наличии у уравнения (1.28) нескольких особых точек приведенное доказательство остается справедливым, если все они лежат по одну сторону от действительной оси. Только в этом случае возможно аналитическое продолжение решения с действительной оси в область, где $|U(x)| \ll k^2$.

Разумеется, уравнения вида (1.28) не охватывают всех возможностей. В частности, к виду (11.28) не сводится волновое уравнение, описывающее дрейфовые колебания плазмы, дрейфующей в скрещенных полях. Дрейфовые колебания существуют в неоднородной плазме, и по своей природе близки к желобковым.

Однако, в отличие от желобковых, в них продольная компонента волнового вектора отлична от нуля, и поэтому они могут резонансно взаимодействовать с продольным тепловым движением заряженных частиц (кинетический резонанс). В отсутствие

внешнего электрического поля резонансное взаимодействие с электронами вызывает раскачку дрейфовых колебаний.

Причиной дрейфовой неустойчивости является неоднородность плазмы, и поэтому она может развиваться во многих системах, предназначенных для магнитного удержания плазмы. Считается, в частности, что в токамаках именно развитие неустойчивостей дрейфового типа вызывает аномальные потери. Оказалось, что плазма токамаков может самопроизвольно переходить из состояния с высоким уровнем турбулентности в состояние с низким.

Естественно, что при этом параметры плазмы меняются в обратном направлении — от низких к высоким, поэтому сам переход называется — $L-H$ -переходом. Исследования показали, что $L-H$ -переход происходит одновременно с возникновением резко неоднородного электрического поля, перпендикулярного магнитному. Подавление турбулентных шумов при таком переходе принято связывать с фактором неоднородности дрейфового движения.

В открытых ловушках такое же влияние на шумы дрейфового типа оказывало неоднородное электрическое поле, вводимое в плазму с торцов [135].

Впервые проблема воздействия неоднородного дрейфового движения на устойчивость дрейфовых колебаний рассматривалась в [136,137]. Эти работы были выполнены для условий так называемых бампи-торов. В таких системах дрейфовой неустойчивости могут быть подвержены узкие «кольца» горячих электронов. Из-за относительно больших значений ларморовского радиуса электронов, сравнимого с толщиной кольца, в этих работах использовалось интегральное волновое уравнение, полученное для плоской геометрии в предположении гауссовского распределения ларморовских центров и линейного распределения электрического поля. В [138] та же проблема рассматривалась в приближении малого ларморовского радиуса с использованием дифференциального волнового уравнения типа (11.13). В этих работах учтено, что в дрейфующей плазме благодаря модификации резонансного условия

$$\omega = k_{\parallel} v_{\parallel} \rightarrow \omega = k_{\parallel} v_{\parallel} + \mathbf{k}_{\perp} \mathbf{V}_{dr}$$

становится возможным резонансное взаимодействие ионов с колебаниями. В покоящейся плазме оно практически исключалось ввиду малой тепловой скорости ионов. При неоднородном дрейфе резонансное взаимодействие принимает гидродинамиче-

ский характер, локализуясь в малой области пространства, где $\omega \approx \mathbf{kV}_{dr}$. Его воздействие на колебания приводит к затуханию последних [136–138].

Данные работы выявили еще один аспект воздействия неоднородного движения на устойчивость плазмы. Дело в том что многие плазменные неустойчивости вызываются резонансным взаимодействием какой-либо группы или сорта частиц, которые являются «выразителями» неравновесности плазмы. Резонансное взаимодействие с остальными частицами при развитии неустойчивости исключается за счет автоматического подбора параметров плазменных колебаний. При резко неоднородном распределении скорости такая ситуация невозможна, так как для любой группы частиц найдется область пространства, в которой за счет доплеровского сдвига частоты данная группа окажется в резонансе с колебаниями. Можно сказать, что неоднородное движение уравнивает все частицы по отношению к колебаниям. В случае дрейфовой неустойчивости существенно, что с колебаниями получают возможность резонансно взаимодействовать не только электроны, но и ионы.

Приложения

П.1. Асимптотика решения неоднородного уравнения Эйри

При вычислении асимптотики функции $G(u)$ воспользуемся асимптотическими представлениями функции Эйри. При $|\arg u| < \pi$ эта функция имеет асимптотику

$$\text{Ai}(u) \approx \frac{1}{2\pi^{1/2}u^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}u^{3/2}\right). \quad (\text{П.1.1})$$

В соответствии с (П.1.1) функция Эйри экспоненциально спадает с ростом $|u|$ в секторе $-\pi/3 < \arg u < \pi/3$, захватывающем действительную полуось. При переходе через границы этого сектора спад сменяется нарастанием. Из-за присутствия дробных степеней в (П.1.1) асимптотические представления на действительной отрицательной полуоси, полученные предельными переходами $\arg u \rightarrow \pi$ и $\arg u \rightarrow -\pi$, оказываются различными. Правильный результат получается суммированием этих представлений

$$\text{Ai}(u) \approx \frac{1}{\pi^{1/2}|u|^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}|u|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

«Внезапное» возникновение второй экспоненты в асимптотике при $|\arg u| = \pi$ (явление Стокса) связано с неточностью асимптотических представлений. Из-за этого обстоятельства в том секторе комплексного переменного, где асимптотика аналитической функции содержит нарастающую экспоненту, к ней может быть добавлена спадающая, не заметная на фоне первой. В данном случае это происходит в секторах $\pi/3 < \arg u < \pi$ и $-\pi/3 > \arg u > -\pi$. Однако эта добавочная экспонента по порядку величины сравнивается с основной на так называемых сопряженных линиях Стокса, где комплексная фаза экспонент в асимптотическом представлении становится действительной. Для функции Эйри это линии $\arg u = \pm\pi$.

Используя (П.1.1), находим асимптотики функций $g_{1,2}(u)$, входящих в (1.15):

$$g_1(u) = \text{Ai}(ue^{i\pi/6}) \approx \frac{1}{2\pi^{1/2}u^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}u^{3/2}e^{i\pi/4} - \frac{i\pi}{24}\right), \quad (\text{П.1.2})$$

$$g_2(u) = \text{Ai}(ue^{5i\pi/6}) \approx \frac{1}{2\pi^{1/2}u^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}u^{3/2}e^{i\pi/4} - \frac{5i\pi}{24}\right). \quad (\text{П.1.3})$$

В соответствии с вышесказанным первая формула справедлива во всей плоскости комплексного переменного, за исключением луча C_1 , вторая — C_2 (рис. П.1.1). Поэтому при использовании (П.1.2), (П.1.3) $\arg u$ следует считать меняющимся в пределах $-\pi/2 < \arg u < \pi/6$ в секторе S_1 , и $-7\pi/6 < \arg u < -\pi/2$ в секторе S_2 .

Первые члены асимптотического разложения (1.16) в этих секторах могут быть получены с помощью формулы приближенного интегрирования [28]

$$\int_a^u a(u')e^{b(u')} du' \approx \frac{a(u)}{b'(u)} \left(1 - \frac{a'}{ab'} + \frac{b''}{b'^2}\right) e^{b(u)}. \quad (\text{П.1.4})$$

При этом для $G_1(u)$ приходим к выражению (1.17). В этом выражении отсутствуют экспоненциальные множители, входящие в асимптотические представления $g_{1,2}(u)$, ввиду взаимного сокращения показателей экспонент.

В секторе S_3 обе функции $g_{1,2}(u)$ экспоненциально нарастают. В нем при вычислении $G_1(u)$ аргумент u функции $g_1(u)$ следует считать меняющимся в пределах $\pi/6 < \arg u < 5\pi/6$, а для $g_2(u)$ отличающимся на -2π , т.е. $-11\pi/6 < \arg u < -7\pi/6$. Производя асимптотическое интегрирование с помощью (П.1.4), находим, что оба слагаемых, входящих в (1.16), экспоненциально нарастают (поэтому показатели экспонент в каждом из слагаемых складываются), но сами слагаемые сокращаются друг с другом. Для выделения малого остатка удобно выразить функцию $g_2(u)$ через $g_{1,3}(u)$ с помощью соотношения (1.14). Используя равенство $\int_{-\infty}^{\infty} \text{Ai}(u) du = 1$, приводим (1.16) к виду

$$G_1(u) = g_1(u)e^{i\pi/6} + \left[g_1(u) \int_{-\infty}^u g_3(u') du' + g_3(u) \int_u^{\infty} g_1(u') du' \right] e^{-i\pi/3}. \quad (\text{П.1.5})$$

Первое слагаемое в (П.1.5) является основным в секторе S_3 , где оно экспоненциально нарастает (см. п. 1.3).

П.2. Стандартное отображение в присутствии случайных воздействий

Проанализируем стандартное отображение, подверженное внешним случайным воздействиям. В качестве таких воздействий могут выступать кулоновские столкновения, а также шумовые поля, вызываемые развитием различных неустойчивостей. Вопрос о влиянии случайных воздействий на стандартное отображение рассматривался по-разному в [11,72] и [75]. В [11,72] исследовалась система, далекая от состояния динамического хаоса, в [75] — общего вида. В настоящем Приложении мы ограничимся анализом первого случая, который по нашему мнению представляет основной интерес. Для соответствующих систем результаты, полученные разными способами, оказались одинаковыми, поэтому мы отдаем предпочтение более простому подходу [11,72].

Введение внешнего случайного фактора приводит к тому, что коэффициент диффузии D_I становится отличным от нуля при $K < 1$, когда внутренняя (динамическая) стохастичность не может развиваться. При расчете D_I ограничимся предельным случаем ($K \ll 1$). В этом случае на большей части плоскости θ, I фазовые траектории близки к прямым линиям $I = \text{const}$, и вариации I могут быть рассчитаны в рамках метода последовательных приближений. Такой подход несправедлив в окрестности резонансных значений $I = 2\pi n$, где фазовые траектории испытывают нелинейные осцилляции. Однако, как мы увидим в дальнейшем, данные области слабо влияют на величину усредненного — эффективного коэффициента диффузии.

Фазовые переменные обычно в большей степени подвержены влиянию случайных факторов, чем переменные действия. Поэтому в наиболее простой модели явления (см. ниже) случайную функцию введем в первое уравнение системы (5.1), которая теперь принимает вид

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_n + I_{n+1} + \xi_n, \\ I_{n+1} &= I_n + K \sin \theta_n,\end{aligned}\tag{П.2.1}$$

где $\langle \xi_n^2 \rangle = \sigma_n$, $\langle \xi_n \xi_m \rangle = 0$, скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по случайному ансамблю $f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right)$.

Решая данную систему по методу последовательных приближений, находим

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} &= \theta_0 + (n+1)I_1 + \sum_{k=1}^n \xi_k, \\ I_{n+1} &= I_1 + K \sum_{k=1}^n \sin \theta_k.\end{aligned}$$

Для определения коэффициента диффузии будем использовать соотношение

$$D_I = \frac{1}{2} \langle (I_{n+1} - I_1)^2 - (I_n - I_1)^2 \rangle, \quad (\text{П.2.2})$$

которое является разностным аналогом равенства

$$D_I = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \text{Dis}_I(t),$$

где $\text{Dis}_I(t)$ — дисперсия I .

С помощью (П.2.2) находим

$$D_I \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{K^2}{4} \langle 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(\theta_{n+1} - \theta_k) \rangle.$$

Усреднение гармонической функции случайной переменной по гауссовскому ансамблю дает

$$\begin{aligned}\langle \cos(\theta_{n+1} - \theta_k) \rangle &= \langle \cos \left[(n+1-k)I + \sum_{l=k}^{n+1} \xi_l \right] \rangle = \\ &= \cos[(n+1-k)I] e^{-(n+1-k)\sigma/2}.\end{aligned}$$

С учетом последнего соотношения находим

$$D_I \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{K^2}{4} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kI) e^{-k\sigma/2} \right].$$

Используя формулу суммирования геометрической прогрессии, окончательно получаем

$$D_I = \frac{K^2}{4} \frac{1 - \gamma^2}{1 + \gamma^2 - 2\gamma \cos I}, \quad (\text{П.2.3})$$

где $\gamma = e^{-\sigma/2}$.

Если случайные воздействия настолько сильны, что разрушают фазовую корреляцию за один период движения ($\sigma \gg 1$), то справедливо приближение хаотических фаз и выражение для коэффициента диффузии (П.2.3) совпадает с (5.6). В другом предельном случае слабых случайных воздействий ($\sigma \ll 1$) получаем

$$D_I \approx \frac{K^2}{4} \frac{\sigma}{1 - \cos I(1 - \sigma^2/8)}.$$

Последнее выражение показывает, что при $\sigma \ll 1$ коэффициент диффузии резко возрастает в окрестности резонансных значений $I^{(n)} = 2\pi n$. Следует отметить, что если $\sigma \leq \sqrt{K}$, то использованное нами линейное приближение становится непригодным, так как случайные воздействия не успевают «сбить» фазу за время нелинейных осцилляций. Однако в задачах, представляющих практический интерес, влияние резонансных областей незначительно. Дело в том, что в таких задачах характерный интервал изменения I , как правило, велик по сравнению с расстоянием между резонансами. Поэтому реальное значение имеет усредненный (эффективный) коэффициент диффузии, характеризующий крупномасштабные движения. Такой коэффициент диффузии естественно определить соотношением

$$J = -D_{I,\text{ef}} \frac{\Delta f}{\Delta I}, \quad (\text{П.2.4})$$

где Δf — изменение функции распределения на интервале ΔI .

В отсутствие источников частиц поток не должен зависеть от I . Из этого условия находим

$$\frac{df}{dI} = -\frac{J}{D_I}, \quad \Delta f = -J \int_{\Delta I} \frac{1}{D_I} dI$$

и в соответствии с (П.2.4) получаем

$$D_{I,\text{ef}} = \left(\frac{1}{\Delta I} \int_{\Delta I} \frac{1}{D_I} dI \right)^{-1}.$$

В рассматриваемом нами случае стандартного отображения имеем

$$D_{I,\text{ef}} = \frac{K^2}{4} \frac{1 - \gamma^2}{1 + \gamma^2}.$$

При $\sigma \ll 1$ ($\gamma \approx 1 - \sigma/2$) эффективный коэффициент диффузии близок к минимальному значению $D_I \approx K^2\sigma/8$, которое характеризует процесс диффузии вдали от резонансного значения

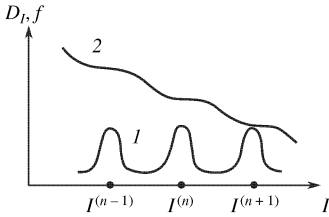


Рис. П.2.1. Диффузия ансамбля динамических систем при слабых случайных воздействиях: 1 — коэффициент диффузии, 2 — функция распределения

действия $I^{(n)} = 2\pi n$. Данное свойство присуще системам с коэффициентом диффузии, зависящим от координаты. Действительно, диффундирующие частицы быстро проходят области, в которых коэффициент диффузии велик, и подолгу задерживаются там, где он мал. В результате функция распределения принимает вид, изображенный на рис. П.2.1. (На нем предполагается, что источник частиц расположен в при малых значениях I , сток — при больших). Из рисунка следует, что основной перепад функции распределения сосредотачивается в областях малых значений D_I , которые по этой причине и определяют $D_{I,ef}$.

Влияние случайных воздействий на стандартное отображение может быть проанализировано и иным способом. Ансамбль систем, эволюционирующий в соответствии с уравнениями (П.2.1), описывается функцией распределения $f(\theta, I, t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + I \frac{\partial f}{\partial \theta} + K \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\theta - 2\pi n t) \frac{\partial f}{\partial I} - \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = 0. \quad (\text{П.2.5})$$

Здесь влияние случайных воздействий, приводящих к диффузионному расплыванию по фазе, учитывается последним слагаемым.

Решение (П.2.5) при $K \ll 1$ будем искать в виде

$$f(I, \theta, t) = f_0(I, t) + K f_1(I, \theta, t) + \dots,$$

где

$$f_1(I, \theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f_{1c,n}(I, t) \cos(\theta - 2\pi n t) + f_{1s,n}(I, t) \sin(\theta - 2\pi n t) + \dots].$$

Для $f_{1c,n}$ из уравнения (П.2.5), линейризованного по $K \ll 1$, получаем следующее выражение:

$$f_{1c,n} = -\frac{1}{2} \frac{K\sigma}{(I - 2\pi n)^2 + \sigma^2/4} \frac{\partial f_0}{\partial I}.$$

Уравнение для медленно меняющейся функции $f_0(I, t)$ имеет вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{K}{2} \frac{\partial f_{1c}}{\partial I} = 0. \quad (\text{П.2.6})$$

Здесь произведено усреднение по фазе θ и обозначено $f_{1c} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{1c,n}$. Суммирование по n в выражении для f_{1c} проводится с помощью формулы

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\alpha - n)^2 + \beta^2} = \frac{\pi}{2\beta} \{ \text{cth}[\pi(i\alpha + \beta)] + \text{cth}[\pi(-i\alpha + \beta)] \}$$

и приводит к выражению

$$f_{1c} = \frac{K}{2} \frac{1 - \gamma^2}{1 + \gamma^2 - 2\gamma \cos I} \frac{\partial f}{\partial I}.$$

Подставляя данное выражение в (П.2.6) находим, что коэффициент диффузии совпадает с полученным ранее (П.2.3). Таким образом, оба способа подсчета приводят к одному и тому же результату.

В рассматривавшейся нами модели внешний случайный фактор действовал непосредственно на фазу динамической системы, в результате чего ее дисперсия возрастала линейно со временем $\text{Dis}_\theta = \sigma^2 t$. В реальных условиях часто более существенными оказываются случайные изменения других переменных: энергии или питч-угла частицы, имеющих скорее смысл действия. Такие изменения приводят к более резкому росту дисперсии фазы со временем $\text{Dis}_\theta \approx \alpha t^3$. В упрощенном одномерном варианте теории процесс изменения «действия» оказывается недиффузионным. В то же время эволюцию двумерной функции распределения, зависящей, например, от энергии и питч-угла частиц, можно в некоторых случаях по-прежнему описывать диффузионным уравнением (см, например, [139]).

П.3. ЭЦР-взаимодействие монохроматического пучка электронов в неоднородном магнитном поле

Предположим (см. [89]), что как электромагнитная волна, так и монохроматический пучок электронов распространяются со стороны большего магнитного поля. Распространение колебаний будем описывать уравнением (7.13), в котором для j_- имеем

$$j_- = \frac{e^2}{m_e} \int_{-\infty}^z \frac{1}{v_{\parallel}} E_-(z') \exp \left\{ -i \int_{z'}^z \frac{1}{v_{\parallel}} [\omega'_e(z'') - \omega] dz'' \right\} dz'. \quad (\text{П.3.1})$$

Здесь учтено, что все электроны движутся в одном направлении — со стороны отрицательных значений z . Отметим, что при получении (П.3.1) влияние плазмы на распространение колебаний не предполагалось малым, поэтому волновое уравнение (7.13) с плотностью тока (П.3.1) справедливо при любой плотности пучка электронов.

Считая магнитное поле меняющимся по линейному закону, а скорость электронов постоянной, приводим уравнение (7.13) к виду

$$E''_- + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E_- + i \frac{\omega \omega_{pe}^2}{v_{\parallel} c^2} \int_{-\infty}^z E_-(z') \exp \left[-\frac{i}{2v_{\parallel}} \frac{d\omega_e}{dz} (z^2 - z'^2) \right] dz'. \quad (\text{П.3.2})$$

Здесь координата z отсчитывается от точки циклотронного резонанса.

Решение (П.3.2) представим в виде контурного интеграла

$$E_-(Z) = \int_C \frac{1}{p^2 + 1} \left(\frac{p - i}{p + i} \right)^{i\Gamma/2\pi} \exp \left(Zp + i \frac{p^2}{4\beta} \right) dp, \quad (\text{П.3.3})$$

где $Z = z\omega/c$, $\beta = c^2/2L\omega v_{\parallel}$.

Контур интегрирования в (П.3.3) следует выбирать таким, чтобы на его концах подынтегральное выражение обращалось в нуль. При $\beta > 0$ это имеет место в незаштрихованных секторах на рис. П.3.1. Контур, изображенный на рис. П.3.1а, дает при

$z \rightarrow -\infty$ волну, распространяющуюся со стороны большего магнитного поля. Интеграл по этому контуру определяется точкой ветвления $p = i$:

$$E_{-} \underset{z \rightarrow -\infty}{\approx} -i \frac{1}{2\pi} \frac{1}{z^{i\Gamma'/2\pi} \Gamma(-i\Gamma'/2\pi)} e^{iZ}. \quad (\text{П.3.4})$$

Здесь сочетание $\frac{\pi\omega_{pe}^2 L}{\omega c}$ обозначено как Γ' , чтобы отличить его от общепринятого обозначения Γ -функции (сравнить с п. 7.1).

Переход к положительным значениям Z удобно осуществлять через верхнюю полуплоскость, т.е. в соответствии с правилом обхода Ландау. Для значений $Z > 0$ контур интегрирования принимает вид, изображенный на рис. П.3.1б. При интегрировании по этому контуру необходимо учитывать как вклад точки ветвления, так и точки перевала $p_s = 2i\beta Z$:

$$E_{-} \underset{z \rightarrow -\infty}{\approx} -i \frac{1}{2\pi} \frac{1}{z^{i\Gamma'/2\pi} \Gamma(-i\Gamma'/2\pi)} e^{iZ} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta^{3/2} Z^2} \left(e^{\Gamma'/2} - 1 \right) e^{4i\beta Z^2 + i\pi/4}. \quad (\text{П.3.5})$$

В последнем выражении первое слагаемое описывает электромагнитную волну, прошедшую через точку циклотронного резонанса. Ее амплитуда по сравнению с падающей (см. (П.3.4)), уменьшается в $\exp(\Gamma'/2)$ раз. (В (П.3.5) при обходе по Ландау $\arg Z$ следует считать равным π .) Электромагнитная энергия была затрачена на создание псевдоволны — второе слагаемое.

Псевдоволна распространяется со скоростью электронов, и поэтому вдали от резонансной точки имеет характерный пространственный масштаб, существенно меньший, чем длина волны электромагнитных колебаний в вакууме. Следовательно, образование псевдоволны можно рассматривать как трансформацию круп-

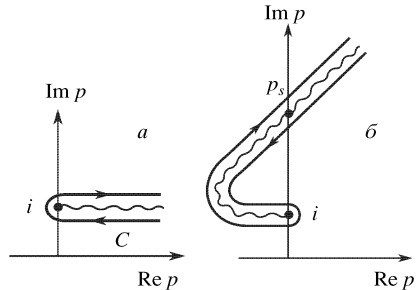


Рис. П.3.1. Контур интегрирования в (П.3.3): $a - Z < 0$, $b - Z > 0$; волнистая линия — разрез, выходящий из точки ветвления $p = i$

номасштабных колебаний в мелкомасштабные (см. гл. 3). Коэффициент трансформации (доля передаваемой энергии), как следует из (П.3.4) и (П.3.5), дается выражением (7.4).

П.4. Уравнения с малым параметром перед старшей производной

П.4.1. Уравнение колебаний плоскопараллельных течений обычной жидкости. Теория уравнений четвертого порядка с малым параметром перед старшей производной была развита в [112] (см. также [111]). Этим работам мы будем следовать при анализе ряда уравнений, принадлежащих данному классу. В интересующих нас уравнениях слагаемое с четвертой производной необходимо учитывать на малых расстояниях от точки резонанса (альвеновского, ларморовского, гидродинамического), где обращается в нуль коэффициент перед второй производной. В этой области коэффициент перед второй

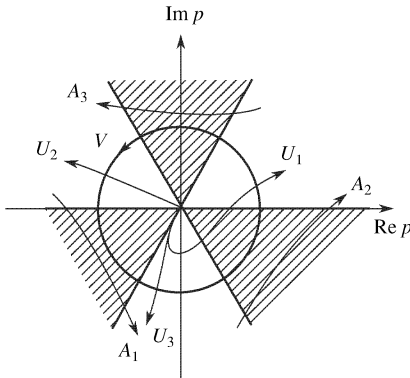


Рис. П.4.1. Контуры интегрирования на плоскости комплексного p , соответствующие решениям (П.4.1) при $\arg \Lambda = \pi/2$: заштрихованы области, в которых (П.4.3) нарастает при $|p| \rightarrow \infty$

производной можно считать меняющимся по линейному закону, а остальные — постоянными.

При этих предположениях уравнение, описывающее колебания плоскопараллельных течений обычной жидкости (уравнение Орра–Зоммерфельда, см. (10.7)) можно привести к виду

$$\frac{1}{\Lambda} \frac{d^4 \psi_1}{d\xi^4} + \xi \frac{d^2 \psi_1}{d\xi^2} + \psi_1 = 0. \quad (\text{П.4.1})$$

Здесь из всех членов, пропорциональных малому параметру — коэффициенту вязкости χ , оставлен только наиболее

важный, содержащий четвертую производную; введена новая переменная $\xi = (x_s - x) V_0''/V_0'$ и обозначение $\Lambda = iV_0'^4/\chi k V_0''^3$.

Уравнения с коэффициентами, линейно зависящими от координаты, удобно решать методом контурных интегралов,

представляя решение в виде

$$\psi(\xi) = \int e^{-\xi p} \varphi(p) dp. \quad (\text{П.4.2})$$

Контуры интегрирования должны быть замкнутыми или такими, на обоих концах которых подынтегральное выражение обращается в нуль.

Подставляя (П.4.2) в (П.4.1), находим

$$\varphi(p) = \frac{1}{p^2} \exp\left(-\frac{p^3}{\Lambda} + \frac{1}{p}\right). \quad (\text{П.4.3})$$

Хотя уравнение (П.4.1) имеет только четыре линейно независимых решения, удобно рассмотреть семь функций $A_k, U_k, V (k = 1 \div 3)$. Соответствующие контуры интегрирования изображены на рис. П.4.1. Как следует из рисунка, рассматриваемые решения связаны тремя соотношениями:

$$A_i = e_{ijk} U_k + \delta_{3i} V \quad (\text{П.4.4})$$

где δ_{ij} — единичный симметричный тензор, e_{ijk} — абсолютно антисимметричный единичный тензор.

В интересующем нас случае $|\Lambda| \gg 1$ функции A_k являются быстро меняющимися. Их асимптотики при $|\xi| \gg |\Lambda|^{-1/3}$ могут быть найдены методом перевала. Подынтегральное выражение в (П.4.2) имеет две перевальные точки

$$p_{1,2} = \pm(\Lambda\xi)^{1/2}.$$

В полуплоскость комплексного переменного

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} \arg \Lambda < \arg p < \frac{5\pi}{6} + \frac{1}{3} \arg \Lambda,$$

где расположен контур A_3 , перевальная точка p_1 попадает, если

$$-\frac{4\pi}{3} - \frac{1}{3} \arg \Lambda < \arg \xi < \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{3} \arg \Lambda, \quad (\text{П.4.5})$$

при этом

$$A_3 \approx \frac{\pi^{1/2}}{\Lambda^{3/4} \xi^{5/4}} \exp\left(-\frac{2i}{3} \Lambda^{1/2} \xi^{3/2} - \frac{i\pi}{4}\right). \quad (\text{П.4.6})$$

Аналогично для A_2 , учитывая вклад перевальной точки p_2 , в секторе

$$-\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{3} \arg \Lambda < \arg \xi < \frac{4\pi}{3} - \frac{1}{3} \arg \Lambda \quad (\text{П.4.7})$$

находим следующее асимптотическое представление

$$A_2 \approx -\frac{\pi^{1/2}}{\Lambda^{3/4} \xi^{5/4}} \exp\left(\frac{2i}{3} \Lambda^{1/2} \xi^{3/2} + \frac{i\pi}{4}\right). \quad (\text{П.4.8})$$

На контур A_1 попадает точка перевала p_1 , если

$$-2\pi - \frac{1}{3} \arg \Lambda < \arg \xi < -\frac{1}{3} \arg \Lambda, \quad (\text{П.4.9})$$

и p_2 , если

$$-4\pi - \frac{1}{3} \arg \Lambda < \arg \xi < -2\pi - \frac{1}{3} \arg \Lambda. \quad (\text{П.4.10})$$

При этих значениях $\arg \xi$ для нахождения A_1 можно воспользоваться соотношениями $A_1 \approx -A_2$ и $A_1 \approx -A_3$, соответственно.

Полученные выражения определяют функции A_k на всей плоскости комплексного переменного ξ за исключением линий C_k (рис. П.4.2). Для нахождения функций A_k на этих линиях следует воспользоваться соотношением

$$A_1 + A_2 + A_3 = V, \quad (\text{П.4.11})$$

следующим из (П.4.4). Здесь функция V — медленно меняющееся решение (П.4.1). С точностью до величин $1/\Lambda$ оно совпадает с регулярным решением укороченного — «идеального» уравнения (П.4.1) без члена с четвертой производной. Образ Лапласа решений укороченного уравнения равен

$$\varphi(p) = \frac{1}{p^2} \exp\left(\frac{1}{p}\right), \quad (\text{П.4.12})$$

а сами решения имеют вид

$$\psi(\xi) = \text{const} \sqrt{\xi} Z_1(2\sqrt{\xi}),$$

где Z_1 — произвольное решение уравнения Бесселя.

Вид решений, соответствующих контурам V, U_k проще всего установить, рассмотрев малые значения ξ ($|\xi| \ll 1$) в случае функции V , и большие ($|\xi| \gg 1$) в случае U_k

$$V = -2\pi i \sqrt{\xi} J_1(2\sqrt{\xi}),$$

$$U_1 = U_3 = -\pi i \sqrt{\xi} H_1^{(1)}(2\sqrt{\xi}), \quad U_2 = \pi i \sqrt{\xi} H_1^{(2)}(2\sqrt{\xi}).$$

Функции U_k в отличие от V имеют особенность при $\xi = 0$.

Существенно, что функции U_k выражаются через решения укороченного уравнения не при всех значениях $\arg \xi$. Такое представление справедливо, если интеграл (П.4.2) сходится для приближенного — «идеального» выражения $\varphi(p)$, даваемого (П.4.12). Сходимость имеет место, если условие $\text{Re}(\xi p) > 0$ выполняется в незаштрихованных секторах, соответствующих контурам U_k . В противном случае сходимость обеспечивается лишь за счет использования полного образа Лапласа (П.4.3), учитывающего эффекты неидеальности. Для каждой из функций U_k это происходит в секторе S_k на плоскости переменного ξ . В этих секторах решения U_k становятся быстро меняющимися, и их асимптотические представления могут быть получены с помощью соотношения (П.4.4).

При использовании приближения идеальной жидкости в качестве линейно независимых решений укороченного уравнения (П.4.1) полезно выбрать функции V и U_3 . Для функции U_3 сектор комплексного переменного S_3 , в котором необходимо учитывать вязкость жидкости, не захватывает действительной оси. На рис. П.4.2 он заштрихован. Такой выбор решений делает возможным использование приближения идеальной жидкости на всей действительной оси за исключением малой окрестности резонансной точки. При продолжении решения через эту область ее можно обходить в комплексной плоскости. Нетрудно убедиться, что правило обхода совпадает с правилом обхода Ландау. Действительно, $\arg \Lambda$ равен $\pi/2$ при $V_0'' > 0$. В этом случае в соответствии с рис. П.4.2 резонансную точку следует обходить сверху при $V_0' < 0$ и снизу при $V_0' > 0$.

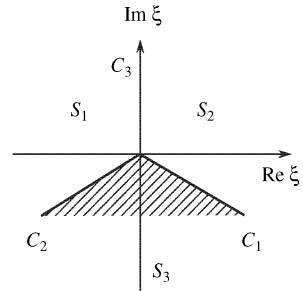


Рис. П.4.2. Характерные линии C_k и секторы S_k для уравнения (П.4.1) при $\arg \Lambda = \pi/2$

П.4.2. Уравнения высокочастотных альвеновских и желобковых колебаний. Уравнения высокочастотных альвеновских колебаний в окрестности точки альвеновского резонанса и желобковых в окрестности точки ларморовского резонанса можно привести к виду

$$\frac{1}{\Lambda} \frac{d^4 \varphi_1}{dx^4} + \frac{d}{dx} x \frac{d\varphi_1}{dx} + P\varphi_1 = 0, \quad (\text{П.4.13})$$

где $x = r - r_s$, $P = -g^2/\varepsilon'_{\perp,r}$, $\Lambda = \varepsilon_{\parallel} \varepsilon'_{\perp,r}/\varepsilon_{\perp}$ для высокочастотных альвеновских колебаний и $P = -\frac{k_y^2 g}{\omega \Omega'_{li,x}} \frac{1}{n_0} \frac{dn_0}{dx}$, $\Lambda = \frac{4}{3} \frac{\Omega'_{li,x}}{\rho_i^2 \Omega_{li}}$

для желобковых. Величины Λ и P будем для определенности считать положительными. Эти условия выполняются, если $dn_0/dx < 0$, $\varepsilon_{\parallel} < 0$ в случае альвеновских колебаний и $gdn_0/dx < 0$, $\Omega_{li} > 0$, $\Omega'_{li,x} > 0$ в случае желобковых.

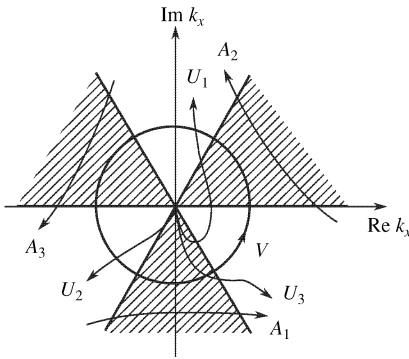


Рис. П.4.3. То же, что на рис. П.4.1, для уравнения (П.4.13) ($\arg \Lambda = 0$)

При решении (П.4.13) методом преобразования Лапласа положим $p = ik_x$, т.е. будем рассматривать это преобразование как преобразование Фурье с комплексным k_x . Это облегчает сопоставление с результатами исследования желобковых колебаний в пп. 11.4, 11.5 и Приложении 5. По этой же причине используется размерная переменная x .

Фурье-образ решения (П.4.13) имеет вид

$$\varphi_1(k_x) = \frac{1}{k_x} \exp\left(-\frac{ik_x^3}{3\Lambda} + \frac{iP}{k_x}\right). \quad (\text{П.4.14})$$

Контур интегрирования, соответствующие семи стандартным решениям, изображены на рис. П.4.3. Три соотношения, связывающие их, аналогичны (П.4.4)

$$A_i = e_{ijk} U_k + \delta_{li} V. \quad (\text{П.4.15})$$

Асимптотики коротковолновых решений $A_{2,3}$, справедливые на всей плоскости комплексного переменного за исключением линий C_i даются выражениями:

$$A_2 \approx -\frac{\pi^{1/2}}{x^{3/4}\Lambda^{1/4}} \exp\left(\frac{2i}{3}x^{3/2}\Lambda^{1/2} - \frac{i\pi}{4}\right), \quad (\text{П.4.16})$$

$$A_3 \approx \frac{\pi^{1/2}}{x^{3/4}\Lambda^{1/4}} \exp\left(-\frac{2i}{3}x^{3/2}\Lambda^{1/2} + \frac{i\pi}{4}\right). \quad (\text{П.4.17})$$

Чтобы найти решение A_1 , а также коротковолновые решения на линиях C_i , следует использовать те же рецепты, что и выше.

Функция V на всей плоскости комплексного переменного ξ выражается через функцию Бесселя

$$V \approx 2\pi i J_0(2\sqrt{Px}),$$

а функции U_k в секторах $S - S_k$ через функции Ханкеля

$$U_1 \approx U_3 \approx \pi i H_0^{(1)}(2\sqrt{Px}),$$

$$U_2 \approx -\pi i H_0^{(2)}(2\sqrt{Px}).$$

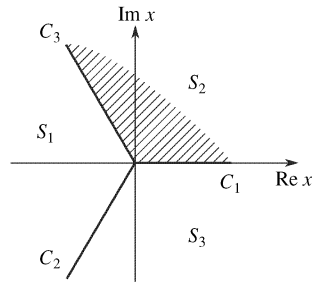


Рис. П.4.4. То же, что на рис. П.4.3, для уравнения (П.4.13) ($\arg \Lambda = 0$)

В секторах S_k (рис. П.4.4), функции U_k становятся быстро меняющимися. Их асимптотические представления могут быть найдены с помощью соотношений (П.4.15).

П.4.3. Уравнение низкочастотных альвеновских колебаний. В окрестности точки альвеновского резонанса уравнение альвеновских колебаний принимает вид

$$\frac{1}{\Lambda} \frac{d^4 E_y}{d\xi^4} + \frac{d}{d\xi} \xi \frac{dE_y}{d\xi} - \xi E_y = 0, \quad (\text{П.4.18})$$

где $\xi = N_y(x - x_s)$, $\Lambda = -\frac{\alpha N_y^2}{n_0(\omega_A^2)_x}$. Оно может быть проанализировано тем же способом, что и (П.4.1). При $|\Lambda| \gg 1$ образ Лапласа решений (П.4.18) дается выражением

$$\varphi(p) \approx \frac{1}{\sqrt{p^2 - 1}} \exp\left(-\frac{p^3}{3\Lambda}\right).$$

Как и выше рассмотрим семь функций A_k, U_k, V . Соответствующие контура на плоскости p изображены на рис. П.4.5. Введенные функции связаны соотношениями (П.4.15).

В секторе комплексного переменного (П.4.5) функция A_3 имеет асимптотику

$$A_3 \approx \frac{\pi^{1/2}}{\Lambda^{1/4} \xi^{3/4}} \exp\left(-\frac{2i}{3} \Lambda^{1/2} \xi^{3/2} + \frac{i\pi}{4}\right). \quad (\text{П.4.19})$$

Для функции A_2 в секторе (П.4.6) получаем

$$A_2 \approx -\frac{\pi^{1/2}}{\Lambda^{1/4} \xi^{3/4}} \exp\left(\frac{2i}{3} \Lambda^{1/2} \xi^{3/2} - \frac{i\pi}{4}\right). \quad (\text{П.4.20})$$

Как и выше, в секторе (П.4.5) $A_1 \approx -A_2$, и в секторе (П.4.7) $A_1 \approx -A_3$. Точно также для определения A_k на линиях C_k следует использовать соотношение (П.4.11).

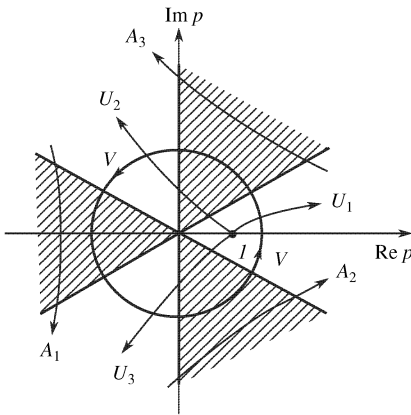


Рис. П.4.5. То же, что на рис. П.4.1, П.4.3 для уравнения (П.4.18) ($\arg \Lambda = 0$)

(П.4.15). Следует отметить, что линии C_k и секторы S_k , характеризующие решения уравнения (П.4.18), расположены на плоскости ξ точно так же, как аналогичные объекты на рис. П.4.4.

Отметим также, что при вычислении функций U_k интегрирование следовало бы производить по обоим берегам разреза, выходящего из точки $p = 1$. Однако это привело бы лишь к удвоению интеграла, нарушив симметрию соотношений, связывающих быстро и медленно меняющиеся функции.

Функция V на всей плоскости комплексного переменного ξ выражается через функцию Бесселя от мнимого аргумента

$$V = -2\pi i I_0(\xi),$$

а функции U_k в секторах $S - S_k$ через функцию Макдональда

$$U_k = K_0(\xi).$$

Для нахождения асимптотик функций U_k в секторах S_k , где они становятся быстро меняющимися, следует использовать соотношение

П.5. Влияние ион-электронного трения на желобковые колебания плазмы с однородной температурой

Ион-электронные столкновения учтем в кинетическом уравнении, введя в него столкновительный член Батнагара–Гросса–Крука в форме, сохраняющей число частиц и учитывающей обмен импульсом с электронами

$$\text{St}(f) = -\nu_{ie}f_1 + \nu_{ie} \left(\frac{n_1}{n_0} + \frac{m_i(\mathbf{v}\mathbf{V}_{1e})}{T} \right) f_0, \quad (\text{П.5.1})$$

где ν_{ie} — частота рассеяния ионов на электронах, $\mathbf{V}_{1e} = \frac{c}{B^2} [\mathbf{B} (\nabla\varphi - \frac{T_0}{en} \nabla n)_1]$ — гидродинамическая скорость электронов. В (П.5.1) не учитываются возмущения температуры, поскольку в случае $\nabla T = 0$ при $x \rightarrow x_s$ имеем $T_{1i} \rightarrow 0$, а возмущения температуры электронов пропорциональны малому параметру $(k\rho_e)^2$. Плазма считается изотермической.

Столкновительная поправка к n_{1i} , определяемая, как обычно, методом интегрирования по траекториям, имеет вид

$$\delta n_{1i} = \frac{i\nu_{ie}}{\omega} \frac{e}{T_0} \int \exp(ik_x x) \varphi_1(k_x) [G_i(x)F_i(F_i - 1) - G_e(x)b_i F_i'] dk_x, \quad (\text{П.5.2})$$

где $G_e(x) = n_0(x) \left(1 + \frac{\Omega_{1e}(x)}{\omega} \right)$.

Чтобы анализ эффектов, связанных с ион-электронным трением, был согласованным, необходимо в уравнении движения электронов учесть трение электронов о ионы. Столкновительную поправку к возмущению плотности электронов, как и δn_{1i} , представим в интегральной форме:

$$\delta n_{1e} = \frac{i\nu_{1e}}{\omega} \frac{e}{T} \int \exp(ik_x x) \varphi_1(k_x) [G_e(x) - G_i(x)] b_i dk_x. \quad (\text{П.5.3})$$

Учитывая (11.16), (П.5.2), (П.5.3), находим полное условие квазинейтральности, учитывающее влияние электрон-ионного трения:

$$\int \exp(ik_x x) \varphi_1(k_x) \left\{ G_i(x)(F_i - 1) + \frac{i}{2} G_i'(x) \frac{dF_i}{dk_x} - S F_i + \frac{i\nu_{ie}}{\omega} [G_i(x)F_i(F_i - 1) - G_e(x)b_i(F_i' + 1)] \right\} dk_x = 0, \quad (\text{П.5.4})$$

где $S = P\rho_i^2$.

Ограничиваясь окрестностью точки ларморовского резонанса, положим $G_i(x) \approx -n_0(x_s) \frac{\Omega'_{i,x}}{\omega} (x - x_s)$, $\Omega_{le}(x) = \text{const}$. Производя также в (П.5.4) сдвиг $x - x_s \rightarrow x$ и замену $x \rightarrow i\partial/\partial k_x$, из условия обращения в нуль подынтегрального выражения получаем уравнение для $\varphi_1(k_x)$:

$$\sqrt{1 - F_i} \frac{d}{dk_x} \left(\sqrt{1 - F_i} \varphi_1 \right) + [-iS F_i - \sigma b_i (F_i' + 1)] \varphi_1 = 0, \quad (\text{П.5.5})$$

где $\sigma = \frac{\nu_{ie}}{\omega} \frac{\Omega_{li} + \Omega_{le}}{\Omega'_{i,x}}$. Решение (П.5.5) имеет вид

$$\varphi_1(k_x) = \frac{1}{\sqrt{1 - F_i}} \exp \left(iS \int \frac{F_i}{1 - F_i} dk_x + \sigma \int \frac{b_i(1 + F_i')}{1 - F_i} dk_x \right). \quad (\text{П.5.6})$$

Ограничимся анализом решений волнового уравнения, которые при удалении от точки ларморовского резонанса переходят в решения укороченного без члена с четвертой производной уравнения (11.20). В бесстолкновительном пределе ($\sigma = 0$) выражения (П.5.6) и (П.4.14) совпадают при $k_x \rightarrow 0$. При нахождении $\varphi_1(x)$ выберем те же контуры интегрирования по dk_x , что и в Приложении П.4.2.

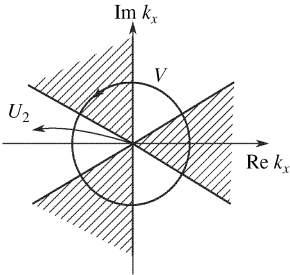
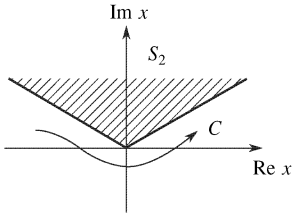


Рис. П.5.1. Контурсы интегрирования в плоскости комплексного k_x , соответствующие длинноволновым решениям (П.5.4): заштрихованы секторы, в которых подынтегральное выражение неограниченно возрастает при $|k_x| \rightarrow \infty$

На регулярное в нуле решение V мелкомасштабные эффекты, проявляющиеся в окрестности резонансной точки, оказывают слабое воздействие. Функцию U_2 , имеющую в этой точке, логарифмическую особенность будем рассматривать на расстояниях $|x| \gg \rho_i$. В этом случае интеграл по dk_x определяется областью значений k_x , в которой для $\varphi_1(k_x)$ можно использовать выражение (П.4.14), причем в нем первое слагаемое в показателе экспоненты несущественно. Значение $\varphi_1(k_x)$ при $|k_x| \rightarrow \infty$ определяется вторым слагаемым в экспоненте (П.5.6), учитывающим ион-

электронное трение $\varphi_1(k_x) \propto \exp\left(\frac{1}{3}\sigma\rho_i^2 k_x^3\right)$. Вклад этой области в интеграл по dk_x будет несуществен, если контур интегрирования уходит бесконечность в секторах комплексного k_x , которые расположены так же, как на рис. П.4.3.



Обратим внимание на то, что на рис. П.5.1 «запрещенные» сектора повернуты на угол $-\pi/6$ по сравнению с рис. П.4.3. Рассмотрение, вполне аналогичное проведенному в Приложении 4, показывает, что вследствие этого на угол $\pi/6$ поворачивается сектор комплексного переменного x , в котором длинноволновое решение волнового уравнения трансформируется в коротковолновое (рис. П.5.2).

Рис. П.5.2. Плоскость комплексного переменного x для длинноволнового решения U_2 : стрелкой обозначен контур обхода точки ларморовского резонанса по Ландау; область, в которой не применимо укороченное уравнение, заштрихована

Этот сектор полностью лежит в верхней полуплоскости. Следовательно, для решений укороченного уравнения типа уравнений (11.19), (11.20) без члена с четвертой производной правило

обхода Ландау остается в силе, причем при действительных значениях аргумента вдали от резонансной точки решение полного волнового уравнения остается длинноволновым.

Список литературы

1. *Власов А.А.* Теория многих частиц. — М.: Гостехиздат, 1950.
2. *Бом Д.* Общая теория коллективных переменных. — М.: Мир, 1978.
3. *Ландау Л.Д.*// ЖЭТФ. 1946. Т.16. С.574.
4. *Тимофеев А.В.*// УФН. 1970. Т.102. С.185.
5. *Богданов Г.Ф., Головин И.Н., Кучеряев Ю.А., Панов Д.А.*// Ядерный синтез. 1962. Приложение. Т.1. С.215.
6. *Datt C.C., Foote J.H., Futch A.H. et al.*// Phys. Fluids. 1965. V.8. P.1472.
7. *Van Kampen N.G.*// Physica. 1955. V.21. P.949.
8. *Case K.M.*// Phys. Fluids. 1960. V.3. P.143.
9. *Дижий Л.А.*// ДАН СССР. 1960. Т.135. С.1068.
10. *Карпман В.И.*// ЖЭТФ. 1966. Т.51. С.907.
11. *Тимофеев А.В.*// Вопросы теории плазмы/ Под ред. Кадомцева Б.Б. — М.: Энергоатомиздат, 1985. Т.14. С.56.
12. *Тимофеев А.В.*// Вопросы теории плазмы/ Под ред. Кадомцева Б.Б.— М.: Энергоатомиздат, 1989. Т.17. С.157.
13. *Bernstein I., Green J., Kruscal M.*// Phys. Rev. Lett. 1966. V.17. P.175.
14. *O'Neil T.M.*// Phys. Fluids. 1965. V.8. P.2255.
15. *Escande D.F., Zekri S., Elsknes Y.*// Phys. Plasmas. 1996. V.3.P.3534.
16. *Линь Цзя-Цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. — М.: ИЛ, 1958.
17. *Berk H.L., Horton C.W., Rosenbluth M.N. et al.*//Phys. Fluids. 1968. V.11. P.365.
18. *Водяницкий А.А., Ерохин Н.С., Мусеев С.С.*// Письма в ЖЭТФ. 1970. Т.12. С.529.
19. *Лиситченко В.В., Ораевский В.Н.*// ДАН СССР. 1971. Т.201. С.1319.
20. *Auerbach S.P.*// Phys. Fluids. 1977. V.20. P.1836.
21. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979
22. *Хединг Д.* Введение в метод фазовых интегралов. — М.:Мир, 1965.
23. *Свейшиков А.А.* Прикладные методы в теории случайных функций. — М.: Наука, 1968.
24. *Шафранов В.Д.*// Вопросы теории плазмы./ Под ред. Леонтовича М.А. — М.: Госатомиздат, 1963. Т.3 С.3.
25. *Жуковский В.Г., Тимофеев А.В.*// Физика плазмы. 1975 Т.1. С.111.

26. *Reuter G.E.H., Sondheimer E.H.*// Proc. Roy. Soc. 1948. V. 195. P.336.
27. *Кондратенко А.Н.* Проникновение поля в плазму. — М.: Мир, 1979.
28. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. — М.: Физматгиз, 1962.
29. *Гинзбург В.Л., Цытович В.Н.* Переходное излучение и переходное рассеяние. — М.: Наука, 1984.
30. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1966.
31. *Елисеев Ю.Н., Степанов К.Н.*// УФЖ . 1983. Т.5. С.683.
32. *Волосов В.И., Котельников И.А., Кузьмин С.Г.*// Физика плазмы. 1998. Т.24. С.517.
33. *Timofeev A.V.*// Nucl. Fus. 1978. V.18. P.955.
34. *Соколов А.А., Тернов И.М.* Релятивистский электрон. — М.: Наука, 1974.
35. *Звонков А.В., Тимофеев А.В.*// Физика плазмы. 1986. Т.12. С.413.
36. *Нафизӣ В., Aamodt R.E.*// Phys. Fluids. 1987. V.30. P.3069.
37. *Жильцов В.А, Скворода А.А, Тимофеев А.В. и др.*// Физика плазмы. 1991. Т.17. С.701.
38. *Жильцов В.А, Куянов А.Ю., Скворода А.А., Тимофеев А.В.*// Физика плазмы. 1994. Т.20. С.267.
39. *Давыдовский В.Я.*// ЖЭТФ. 1963. Т.43. С.886.
40. *Коломенский А.А., Лебедев А.Н.*// ЖЭТФ. 1963. Т.44. С.261.
41. *Fish N.J.*// Rev. Mod. Phys. 1987. V.59. P.175.
42. *Куянов А.Ю., Скворода А.А., Timofeev A.V., Zvonkov A.V.*// 19th EPS Conf. Contr. Fus. and Plasma Phys. Innsbruck. 1992. ECA. V.16C. Pt.2. P.1521.
43. *Звонков А.В., Куянов А.Ю., Скворода А.А., Тимофеев А.В.*// Физика плазмы. 1998. Т.24. С.424.
44. *Henrard J., Lemaître A.* //Celestial Mechanics. 1983. V.30. P.197.
45. *Henrard J.*//Dynamics reported. 1993.V.2. P.117.
46. *Котельников И.А., Ступаков Г.В.*//ЖЭТФ. 1983. Т.84. С.956.
47. *Жаров А.А., Сергеев А.С., Токман М.Д.*// Физика плазмы. 1986. Т.12. С.1074.
48. *Нейштадт А.И., Тимофеев А.В.*// ЖЭТФ. 1987. Т.93. С.1706.
49. *Nevins W.M., Rognlien T.D., Cohen B.I.*//Phys. Rev. Lett. 1987. V.59. P.60.
50. *Cohen B.I., Cohen R.H., Nevins W.M., Rognlien T.D.*// Rev. Mod. Phys. 1991. V.63. P.949.
51. *Либерман А., Лихтенберг М.* Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1989
52. *Звонков А.В., Тимофеев А.В.*// Физика плазмы. 1989. Т.15. С.552.
53. *Fielder-Ferrari M., Calvao R.M.O.*//Plasma Phys. Contr. Fus. 1986. V.28. P.515.
54. *Тимофеев А.В.*// ЖЭТФ. 1978. Т.75. С.1303.
55. *Нейштадт А.И.*// Физика плазмы. 1986. Т.12. С.992.

56. *Cary J.R., Escande D., Tennyson J.L.*//Phys. Rev. 1986. V. A34. P.4256.
57. *Нейштадт А.И.*// ПММ. 1975. Т.39. С.621.
58. *Суворов Е.В., Токман М.Д.*// Физика плазмы. 1989. Т.15. С.540.
59. *Панов Д.А., Тимофеев А.В.*// Физика плазмы. 1995. Т. 21. С.1042.
60. *Katney C.F.F.* // Phys. Fluids. 1978. V.21. P.184.
61. *Katney C.F.F.* // Phys. Fluids. 1979. V.22. P.2188.
62. *Тимофеев А.В.*// Физика плазмы. 1986. Т.12. С.190.
63. *Муромкин Ю.А.*//Итоги науки и техники. Физика плазмы. Плазменные методы разделения изотопов./ Под ред. Карчевского А.И. — М.: ВИНТИ, 1991. Т.12. С.83.
64. *Сковорода А.А., Тимофеев А.В., Шбилкин Б.Н.*// ЖЭТФ. Т.73. С.526.
65. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. — М.: Наука, 1973.
66. *Цытович В.Н.*// Вестник МГУ. 1951. №11. С.27.
67. *Dawson J.M.*//Proc. Int. Conf. Plasma Phys. Lausanne. 1984. Invited Papers. V.2. P.837.
68. *Katsoulas T., Dawson J.M.*// Phys. Rev. Lett. 1983. V.51. P.392.
69. *Сагдеев Р.З.*//Вопросы теории плазмы./Под ред. М.А.Леонтовича. — М.: Атомиздат, 1964. Т.4. С.20.
70. *Нейштадт А.И., Петровичев Б.А., Черников А.А.*// Физика плазмы. 1989. Т.15. С.1021.
71. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. — М.: Наука, 1988.
72. *Тимофеев А.В.*// Физика плазмы. 1975. Т.1. С.88.
73. *Костюков И.Ю., Фрайман Г.М.*// Физика плазмы. 1995. Т.21. С.515.
74. *Галеев А.А., Сагдеев Р.З.*// Вопросы теории плазмы./Под ред. Леонтовича М.А. — М.: Атомиздат, 1973. Т.7. С.205.
75. *Rochester A.V., Rosenbluth M.N., White R.B.*// Phys. Rev. 1981. V. A23. P.2664.
76. *Эллис В., Бужсбаум С., Берс А.* Волны в анизотропной плазме. — М.: Атомиздат, 1966.
77. *Исаков С.Б., Цытович В.Н.*// Физика плазмы. Т.11. С.1270.
78. *Тимофеев А.В.*// Физика плазмы. 1992. Т.18. С.407.
79. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. — М.: Наука, 1973.
80. *Пыля А.Д., Федоров В.И.*// ВЧ-нагрев плазмы/Под ред. А.Г.Литвака. — Горький.: ИПФ АН СССР, 1983. С.281.
81. *Ахизер А.И., Ахизер И.А., Половин Р.В., Ситенко А.Г., Степанов К.Н.* Электродинамика плазмы. — М.: Наука, 1974.
82. *Гинзбург В.Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме. — М.: Наука, 1967.
83. *Boratici M., Cano R., De Barbieri O., Engelmann F.*// Nucl. Fus. 1983. V.23. P.1153.
84. *Budden K.G.* Radio waves in the ionosphere. — Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1961.

85. *Стикс Т.* Теория плазменных волн. — М.: Атомиздат, 1966.
86. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. — М.: Наука, 1974.
87. *Сковорода А.А., Швилкин Б.Н.*// ЖЭТФ. 1976. Т.70. С.1779.
88. *Тимофеев А.В., Чулков Г.Н.*// Физика плазмы. 1981. Т.7. С.129.
89. *Vrambilla M.*// Nucl. Fus. 1969. V.9. P.343.
90. *Timofeev A.V., Nekrasov A.K.*// Nucl. Fus. 1970. V.10. P.377.
91. *Звонков А.В., Чулков Г.Н.*// ЖЭТФ. 1983. Т.84. С.60.
92. *Касилов С.В., Пятак А.И., Степанов К.Н.*// Плазменная электродинамика. / Под ред. В.И. Курилко и др. — Киев: Наукова Думка, 1989. С.179.
93. *Zhiltsov V.A., Kosarev P.M., Likhstein V.K., Skovoroda A.A. et al.*// Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. Res. Vienna: IAEA, 1979. V.2. P.469.
94. *Звонков А.В., Тимофеев А.В.*// Физика плазмы. 1988. Т.14. С.1270.
95. *Тимофеев А.В.*// Физика плазмы. 1999. Т.25. С.232.
96. *Лонгинов А.В., Степанов К.Н.*// Высокочастотный нагрев плазмы./ Под ред. Литвака А.Г. — Горький: ИПФ АН СССР, 1983. С.105.
97. *Звонков А.В., Тимофеев А.В.*// Физика плазмы. 1987. Т.13. С.282.
98. *Тимофеев А.В., Харитонов К.Ю.*// Физика плазмы. 1989. Т.15. С.674.
99. *Karney C.F.F., Perkins F.W., Sun Y.C.*// Phys. Rev. Lett. 1979. V.42. P.1621.
100. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982.
101. *Тимофеев А.В.*// Вопросы теории плазмы/Под ред. Леонтовича М.А. — М.: Атомиздат, 1979. Т.9. С.205.
102. *Мазур В.А., Михайловский А.Б., Френкель А.Л., Шульман И.Г.* Вопросы теории плазмы./Под ред. Леонтовича М.А. — М.: Атомиздат, 1979. Т.9. С.233.
103. *Velikhov E.P.*// Nucl. Fus. 1961. Suppl. V.2. P.492.
104. *Блехер П.М.*// Физика плазмы. 1985. Т.11. С.439.
105. *Rosenbluth M.N., Rutherford P.H.*// Phys. Rev. Lett. 1975. V.34. P.1428.
106. *Rosenbluth M.N., Berk H.L., Van Dam J.W., Lindberg D.M.*// Phys. Rev. Lett. 1992. V.68. P.596.
107. *Pridmore-Brown D.C.* // Phys. Fluids. 1966. V.9. P.1290.
108. *Uberoi C.* // Phys. Fluids. 1972. V.15. P.1673.
109. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям — М.: Наука, 1974.
110. *Rayleigh (J.W.Strutt)*// Scientific Papers. Cambr. Univ. Press. 1880. V.1. P.474.
111. *Линь Цзя-Цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. — М.: ИЛ, 1958.
112. *Wasow W.*// Ann. Math. 1948. V.49. P.852.
113. *Тимофеев А.В.*// Физика плазмы. 1979. Т.5. С.705.
114. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
115. *Rosenbluth M.N., Simon A.*// Phys. Fluids. 1964. V.7. P.557.

116. *Михайловский А.Б.* Теория плазменных неустойчивостей. Т.2. — М.: Атомиздат, 1977.
117. *Андронов А.А., Фабрикант А.Л.* // Нелинейные волны. / Под ред. Гапонова-Грехова А.В. — М.: Наука, 1979. С.69.
118. *Тимофеев А.В.* // Физика плазмы. 1984. Т.10. С.884.
119. *Timofeev A.V.* // Plasma Phys. 1968. V.10. P.235.
120. *Putvinski. S.V.* // Nucl. Fus. 1975. V.15. P.723.
121. *Госсард Э., Хук У.* Волны в атмосфере. — М.: Мир, 1975.
122. *Abdrashitov C.V., Bajborodin S.F., Bekhtenev A.A., Volosov V.I. et al.* // Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fus. Res. Vienna.: IAEA, 1981. V.1. P.539.
123. *Беттнев А.А., Волосов В.И.* // ЖТФ. 1977. Т.47. С.1450.
124. *Тамм И.Е.* // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. / Под ред. Леонтовича М.А. — М.: Изд. АН СССР, 1958. Т.1. С.3.
125. *Rosenbluth M.N., Simon A.* // Phys. Fluids. 1965. V.8. P.1300.
126. *Тимофеев А.В.* // Ядерный синтез. 1966. Т.6. С.93.
127. *Timofeev A.V.* // Nucl. Fus. 1968. V.8. P.99.
128. *Rosenbluth M.N., Krall N.A., Rostoker N.* // Nucl. Fus. 1962. Suppl. V.1. P.143.
129. *Арсенин В.В.* // Итоги науки и техники. Физика плазмы. / Под ред. В.Д. Шафранова. — М.: ВИНТИ, 1988. Т.8. С.49.
130. *Тимофеев А.В.* // Физика плазмы. 1999. Т.25. С.573.
131. *Тимофеев А.В.* // Физика плазмы. 2000. Т.26. С.132.
132. *Петвиашвили В.И., Яньков В.В.* // Вопросы теории плазмы. / Под ред. Кадомцева Б.Б. — М.: Энергоатомиздат, 1985. Т.14. С.3.
133. *Костин В.М., Тимофеев А.В.* // ЖЭТФ. 1967. Т.53. С.1378.
134. *Harrison E.R.* // Proc. Phys. Soc. 1963. V. B82. P.689.
135. *Mase A., Itakura A., Inutake M. et al.* // Nucl. Fus. 1991. V.31. P.1725.
136. *Sanuki H., Watanabe T., Watanabe M.* // Phys Fluids. 1980. V.23. P.158.
137. *Sanuki H.* // Phys Fluids. 1984. V.27. P.2500.
138. *Timofeev A.V., Туриков С.Е.* // Fusion Technology. 1999. V.1Т. P.253.
139. *Звонков А.В., Тимофеев А.В.* // Физика плазмы. 1997. Т.23. С.945.
140. *Smith R.A., Rosenbluth M.N.* // Phys. Rev. Lett. 1990. V.64. P.649.
141. *Smith R.A.* // Phys. Fluids. B. 1992. V.4. P.287.
142. *Тимофеев А.В.* // ЖТФ. 1968. Т.38. С.14.